



**Antero da Conceição
Preto Ferreira Neves**

**Séries na obra de F. Gomes Teixeira: Dois artigos de
1896 e de 1900 no Crelle Journal**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática, realizada sob a orientação científica do Dr. Helmuth Malonek, Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Aos meus pais.

o júri

presidente

Prof. Dr. Domingos Moreira Cardoso
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Prof. Dr. Semyon Borisovich Yakubovich
Professor Associado com Agregação da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Prof. Dr. Helmuth Robert Malonek
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Ao Professor Dr. Helmuth Malonek pela amizade que colocou na minha orientação durante o trabalho que realizámos, pela confiança que sempre fez questão de transmitir e pelas luzes que fez acender em muitos momentos de escuridão.

À Olga Roque, minha colega de mestrado e de profissão, obrigado pela amizade e pelo tempo que passámos a analisar Gomes Teixeira.

Por último, um agradecimento muito especial aos que são o meu mundo, os meus pais Gaspar e América, o meu irmão Francisco, e a minha Leonor.

palavras-chave

Francisco Gomes Teixeira, séries, séries de potências, desenvolvimento em série, função holomorfa, resíduos, teorema de Teixeira, teorema de Cauchy, teorema dos resíduos, teorema de Laurent.

resumo

Esta dissertação tem como principal objectivo a análise da obra do matemático português Francisco Gomes Teixeira, em especial no que diz respeito à área de desenvolvimento de funções em série de potências.

Começámos por tentar compreender a importância desta matéria à época de Teixeira, nomeadamente nos jornais por ele publicados: *Jornal de Sciencias* e nos *Annaes*, e como era abordada pela comunidade internacional, e depois passámos à dissecação da matemática usada por Gomes Teixeira. São para isso analisados dois artigos: *Sur le développement des fonction en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable* e *Sur les séries ordonnée suivante les puissances d'une fonction donnée*, publicados no jornal *Journal für die reine und angewandte mathematik*, ou, como é mais conhecido, *Journal de Crelle*. Nestes artigos, Gomes Teixeira desbrava o caminho para aquele que ficou conhecido como o Teorema de Teixeira e pode-se assistir a uma crescente sofisticação e apuro da teoria por ele usada. É notório que, nos textos originais de Teixeira, não constam as demonstrações de muitos resultados nem tampouco imagens ilustrativas das descrições por ele feitas. É por isso que a análise a que nos propusemos, é, na sua essência, o completar destes vazios, para que se entenda um pouco melhor, a obra de F. Gomes Teixeira.

keywords

Francisco Gomes Teixeira, series, power series, series expansion, holomorphic function, residues, Teixeira's theorem, Cauchy's theorem, residue theorem, Laurent's theorem.

abstract

The main purpose of this dissertation is the analysis of the work of the portuguese mathematician Francisco Gomes Teixeira, especially in which concerns the power series expansion of functions. We started by understanding the importance of this subject during Teixeira's time, in particular in the journals which he founded: *Jornal de Sciencias* and the *Annaes*, and how it was approached by the international community. Only then we started dissecting the mathematics used by Gomes Teixeira. For that we analyzed two articles: *Sur le développement des fonction en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable* and *Sur les séries ordonnée suivante les puissances d'une fonction donnée*, both published in the *Journal für die reine und angewandte mathematik*, or *Crelle's Journal*, as it is more easily recognized. In these articles, Gomes Teixeira finds his way to what is known as Teixeira's Theorem and we assist a growing sophistication and perfecting of the theory used.

It is notorious that, in Teixeira's original writings, there are no demonstrations of many results nor figures to illustrate the descriptions he makes. That is why, the analysis we aim to achieve is, in its essence, the filling of those empty spaces so that the reader may understand a bit better and faster the work left by F. Gomes Teixeira.

Conteúdo

Introdução	1
1 Notas biográficas sobre F. Gomes Teixeira	3
2 As obras de Gomes Teixeira e as séries	5
2.1 Gomes Teixeira no Jahrbuch Database	5
2.2 Gomes Teixeira no <i>Journal für die reine und angewandte Mathematik – Crelle Journal</i>	7
2.3 As séries no <i>Jornal de Sciencias</i> e nos <i>Annaes Scientificos</i>	8
3 Análise do primeiro artigo	11
3.1 Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable	12
3.1.1 Sur les développements de $f(x)$ suivant les puissances de $\sin x$ qui ont lieu dans une aire limitée	12
3.1.2 Sur les développements de $f(x)$ suivant les puissances de $\sin x$ qui ont lieu dans une bande infinie	49
4 Análise do segundo artigo	61
4.1 Sur les séries ordonnées suivant les puissances d’une fonction donnée . .	63
4.1.1 Sur le développement de $f(x)$ en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de $\Theta(x)$	63
4.1.2 Sur les séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{x-a}{x-b}$	79
4.1.3 Sur la série de <i>Fourier</i>	110
5 Crítica aos textos de Gomes Teixeira	115
6 Conclusão	117
A. ANEXOS	119

A.1	Teorema de Cauchy. Teorema dos resíduos de Cauchy. Princípio do Argumento	119
A.1.1	Teorema de Cauchy	119
A.1.2	Teorema dos resíduos de Cauchy	119
A.1.3	Princípio do Argumento	120
A.2	Teorema de Laurent. Série de Laurent. Resíduos	120
A.2.1	Teorema de Laurent	120
A.2.2	Série de Laurent e resíduos	121
A.3	Série de Fourier	122
	Lista de figuras	123
	Lista de tabelas	126
	Bibliografia	127

Introdução

Que grande é o Mundo! E eu só!
Que tortura tamanha!
Ninguém! Meu pai é o Céu. Minha
mãe é a Montanha.

António Nobre, Só.

Quando falamos de matemáticos, surgem imediatamente nomes como Pitágoras, Euler, Gauss ou Cauchy, e raras são as conversas que começam com nomes portugueses ou mesmo onde eles surgem em algum ponto. Isso talvez se deva a uma deficiente informação/formação na área da História da Matemática, que se espalhava por todos os níveis de ensino e que, nos parece, tem vindo a ser combatida.

Procurámos, por isso, que esta dissertação fosse um contributo para essa luta por realçar o papel dos portugueses na História da Matemática, neste caso, do grande matemático português do seu tempo, Francisco Gomes Teixeira.

Mas para realçarmos tal papel, temos que conhecer a sua obra, e é por isso que o principal objectivo deste trabalho, passa pela análise de dois artigos, intitulados *Sur le développement des fonction en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable* e *Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée*, datados de 1896 e 1900, respectivamente. Foram ambos publicados no *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, o famoso *Crelle Journal*, o primeiro no volume CXVI e o segundo no volume CXXII, escritos em língua francesa e nas quais Teixeira, como se pode ver pelos títulos, abordou o tema do desenvolvimento de funções em série de potências.

Podemos dividir esta dissertação em duas parte. Na primeira, apresentam-se algumas referências biográficas de Gomes Teixeira – aqui pouco nos alongámos pois existem vários e bons documentos que abordam a vida do matemático, mas procurámos depois, fazer um estudo sobre como é apresentado Teixeira no estrangeiro – e analisámos, para isso, as entradas presentes no *Jahrbuch*¹ relativas a este autor, procedendo à respectiva verificação dos dados de cada uma, observando a presença de algumas incorrecções.

¹Projecto de base de dados electrónica para documentos relacionados com Matemática onde estão

Depois, como os dois artigos que são objecto de estudo desta dissertação foram publicados no *Crelle Journal*, fomos analisar a dimensão total da participação de Gomes Teixeira no mesmo, uma colaboração que se estendeu por vários anos.

E por fim, também porque o tema principal do presente trabalho são as séries, preocupámo-nos em saber que importância lhe foi atribuída no *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* e nos *Annaes Scientificos da Academia Politecnica do Porto*, ambos fundados por Gomes Teixeira, e onde encontrámos trabalhos de matemáticos dos mais variados países da Europa².

A segunda parte do texto, e aquela que esperamos ser uma verdadeira ajuda para melhor se perceber a obra científica de Teixeira, é formada pela análise aos textos do matemático.

Nessa análise, onde incluímos demonstrações justificativas dos passos dados por Gomes Teixeira, análises gráficas, complementos teóricos e algumas referências a gralhas tipográficas e possíveis erros do autor, a nossa grande preocupação centra-se na descoberta do fio condutor na investigação de Teixeira – o que o levou a procurar determinado resultado, o que o levou a começar a investigação de determinado modo, e mesmo, aquilo que é, para Gomes Teixeira, o mais importante nos seus artigos – para podermos chegar com ele a resultados tão importantes como o denominado *Teorema de Teixeira* e assim aferir da real contribuição de Gomes Teixeira para a Matemática.

No final, com toda a modéstia a que nos obriga a figura histórica de Gomes Teixeira, fazemos a crítica ao seu trabalho, julgando-o, não com olhos do seu tempo, mas sim de acordo com os parâmetros que regem quem escreve matemática no presente.

presentes obras publicadas desde 1868 a 1942. Baseado no *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, está hoje incluído no Zentrallblat MATH, outra grande base de dados onde estão dados desde 1868 até à actualidade.

²Hoje podemos encontrar os volumes destes jornais na internet, na página do Fundo Antigo da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto: <http://www.fc.up.pt/fa/?item=362&p=apr>

Capítulo 1

Notas biográficas sobre F. Gomes Teixeira

Natural de São Cosmado, no concelho de Armamar - Viseu, Gomes Teixeira nasceu a 28 de Janeiro do ano de 1851, ano que marca o fim definitivo das lutas internas em Portugal com o início do movimento da *Regeneração*. Teixeira nasceu, portanto, no início de um período de grande progresso económico do país.



Contemporâneo de escritores como Eça de Queirós, Antero de Quental, Ramalho Ortigão e Guerra Junqueiro, nomes que ilustram bem a força do movimento literário naquela altura, Gomes Teixeira foi um dos grandes responsáveis, juntamente com Gago Coutinho e Sacadura Cabral, Nery Delgado, Álvaro Basto, Ferreira da Silva, Egas Moniz, entre tantos outros, do ressurgimento científico que se verificou no final do século XIX, início do século XX. A este propósito, encontramos escrito em AFONSO [1974]:

Nas matemáticas, além de outros, notabilizou-se Gomes Teixeira, sábio de renome europeu, autor de muitos e valiosos trabalhos (Tratado das Curvas Especiais Notáveis, Cálculo Diferencial, Histórias das Matemáticas em Portugal, etc.) e fundador do Jornal de Ciências Matemáticas e Astronómicas, e outras publicações científicas da sua especialidade.

AFONSO 1974, p.380

Segundo ALVES 2004, p.67, Teixeira era monárquico, mas isso não impediu que colaborasse com republicanos e, de facto, ele e a regeneração andaram juntos grande parte

da sua vida. Aos 28 anos filiou-se no Partido Regenerador, um dos partidos integrados no sistema bipartidário de governação, e pelo qual foi deputado várias vezes. Mais tarde integrou o Partido Regenerador Liberal fundado por João Franco, em ruptura com Hintze Ribeiro que liderava o Partido Regenerador. Mas talvez pela sua declarada ignorância nos assuntos da política, Gomes Teixeira não deveria defender tanto as ideias partidárias mas sim ideais humanistas, e isso fez com que fosse respeitado por todos, ao ponto de, ainda de acordo com ALVES 2004, p.68, em 1900 ser alvo de uma homenagem prestada pela *Camara dos Dignos Pares do Reino*, proposta por um deputado de outro partido - Gonçalo de Almeida Garret.

Em 1902, o Governo, como forma de reconhecer oficialmente o grande contributo de Teixeira para a ciência, manda publicar todas as suas obras, distribuídas por sete volumes, e onde encontramos os dois artigos objecto de análise nesta dissertação. Mas para além destes dois artigos, Gomes Teixeira escreveu muito mais sobre séries, e sobre desenvolvimento de funções em série. O trabalho que mais reconhecimento teve, foi talvez a memória premiada pela Real Academia de Ciências Exacta Físicas e Naturales de Madrid, intitulada *Sobre o desenvolvimento das funções em série*, mas para além desta, Teixeira dedicou a primeira parte do capítulo VII de *Cálculo Diferencial* a este assunto, e também artigos publicados no *Crelle Journal* se baseiam em séries, entre outros.

É, no entanto, o *Tratado das curvas especiais notáveis, tanto planas como torsas*, o seu trabalho mais reconhecido.

Faleceu a 8 de Fevereiro de 1933, não sem antes ter dedicado parte da sua vida científica à história da Matemática, a qual sempre teve em particular atenção, como podemos ver na seguinte declaração:

Nunca deixei, em qualquer estudo matemático, de traçar a história da questão nele versada.

Citação de F. G. Teixeira em STRUIK 1997, p.372. Apêndice: Matemáticos Portugueses por DIONÍSIO, José Joaquim e OLIVEIRA, Augusto J. Franco.

e é por isso crucial que seja a Matemática a primeira a esforçar-se pela manutenção do seu nome na história, prestando-lhe continua homenagem.

Capítulo 2

As obras de Gomes Teixeira e as séries

2.1 Gomes Teixeira no Jahrbuch Database

O Jahrbuch Database (Jahrbuch) é uma base de dados que podemos encontrar online em: <http://www.emis.de/MATH/JFM/JFM.html> e onde estão presentes informações – referências e resumos – sobre publicações relacionadas com Matemática desde 1868 a 1942.

Estão aí presentes, artigos de Gomes Teixeira espalhados por três formas distintas de escrever o seu nome:

1. Teixeira, F. G.
2. Gomes Teixeira, F.
3. Teixeira, F. Gomes

Achámos 137 resultados na nossa pesquisa, contudo, depois de análise mais atenta, verificámos a repetição de dois deles: *Sobre o desenvolvimento das funções em série ordenada segundo potências de senos e cosenos*, que podemos encontrar nas páginas 35-47 do décimo volume do *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* – o primeiro dos dois jornais científicos fundados por Teixeira, no Jahrbuch este artigo aparece com o título traduzido, para inglês, de duas formas diferentes e com o ano de publicação diferente, 1890 e 1891, sendo o último o correcto; o outro artigo repetido, é *Sur une courbe qui figure dans la théorie du quadrilatère articulé*, publicado em francês e datado de 1915, neste caso, para além da repetição não detectámos nenhum erro na referência.

Outro facto que nos chamou a atenção é a confusão reinante na língua de publicação dos artigos. Algumas referências têm como língua de publicação, a língua do país onde ela ocorreu, ora, sabemos que isso nem sempre acontece, tal como podemos verificar

pelos artigos analisados nesta dissertação – escritos em francês mas editados na Alemanha. Foi, no entanto, a presença de um grande número de artigos referenciados como sendo escritos em espanhol, que nos chamou a atenção para esta questão. De facto, muitos desses artigos, não estão escritos em espanhol, mas sim em português e pareceu-nos importante realçar este aspecto como forma de preservar a portugalidade - inquestionável no nosso país, mas algo duvidosa se analisarmos os dados de forma crua - de Francisco Gomes Teixeira.

Apresentamos seguidamente 4 tabelas onde se pode ler o número de obras publicadas em cada língua¹, tal como está referenciado e corrigido.

Língua	PT	FR	ES	EN	DE	IT	NL	Sem ref.	Total
N.º de obras	21	60	19	2	2	1	1	1	107
N.º corrigido	27	61	13	2	1	1	0	0	105
Diferença	+6	+1	-6	0	-1	0	-1	-1	

Tab. 2.1: Obras referenciadas como *Teixeira, F. G.*

Língua	PT	FR	ES	EN	DE	IT	NL	Sem ref.	Total
N.º de obras	4	7	6	0	0	0	0	2	19
N.º corrigido	9	7	3	0	0	0	0	0	19
Diferença	+5	0	-3	0	0	0	0	-2	

Tab. 2.2: Obras referenciadas como *Gomes Teixeira, F.*

Língua	PT	FR	ES	EN	DE	IT	NL	Sem ref.	Total
N.º de obras	1	2	5	1	1	0	0	0	10
N.º corrigido	3	2	3	1	1	0	0	0	10
Diferença	+2	0	-2	0	0	0	0	0	

Tab. 2.3: Obras referenciadas como *Teixeira, F. Gomes*

Língua	PT	FR	ES	EN	DE	IT	NL	Sem ref.	Total
N.º de obras	26	69	30	3	3	1	1	3	136
N.º corrigido	39	70	19	3	2	1	0	0	134
Diferença	+13	1	-11	0	-1	0	-1	-3	

Tab. 2.4: Totais de obras

Da análise das tabelas conseguimos verificar uma grande variação nos valores de obras publicadas em espanhol e português, entre o que está no Jahrbuch e a informação corrigida, a amplitude dessa diferença é quase igual, sendo que, enquanto o número de

¹PT-Português, FR-Francês, ES-Espanhol, EN-Inglês, DE-Alemão, IT-Italiano, NL-Holandês

obras em português cresce, em espanhol decresce. Ainda assim, nota-se que a língua francesa predomina nas obras de Teixeira referenciadas no Jahrbuch.

No gráfico seguinte a diferença referida está ainda mais visível.

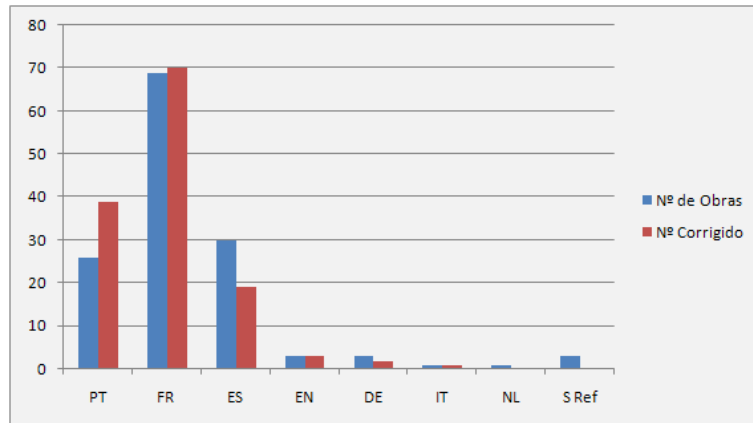


Fig. 2.1: Variação de valores entre o referido e a realidade.

2.2 Gomes Teixeira no *Journal für die reine und angewandte Mathematik* – *Crelle Journal*

A colaboração de Gomes Teixeira com o *Crelle Journal* estende-se ao longo de 19 anos, com 6 artigos publicados:

Volume	Ano	Artigo
100	1887	Sur un théorème de M. Hermite relatif à l'interpolation
116	1896	Sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable
122	1900	Sur les series ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée
125	1900	Sur le développement des fonctions doublement périodiques de second espèce en série trigonométriques
126	1900	Sur le convergence des formules d'interpolation de Lagrange, de Gauss, etc.
131	1906	Sur quelques applications des series ordonnées suivant les puissances du sinus.

Tab. 2.5: Artigos publicados por Teixeira no *Crelle Journal*.

Gomes Teixeira começou a sua participação neste jornal com uma carta dirigida a Charles Hermite, e depois deste falecer – em 1901 – apenas publicou um artigo. De notar que a maioria desses artigos abordava o assunto tratado na segunda parte desta dissertação: as séries e o desenvolvimento de funções em série.

2.3 As séries no *Jornal de Sciencias* e nos *Annaes Scientificos*

Gomes Teixeira fundou dois jornais dedicados às ciências, o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* e os *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, que teve edição de 1905 a 1920. Segundo o Fundo Antigo da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto², o primeiro destes jornais teve publicação entre os anos de 1877 e 1902, o segundo foi editado de 1905 a 1920. Havendo, portanto, uma pausa de 2 anos, 1903 e 1904, entre o fim do primeiro jornal e o início do segundo.

Pelos diferentes volumes destes dois jornais, encontramos alguns artigos relacionados com séries, da autoria de importantes matemáticos.

Para além do próprio Francisco Gomes Teixeira, nomes como Cesàro (italiano), Gutzmer(alemão), Lerch(checo) e d'Ocagne(francês), publicaram artigos nestes jornais, o que mostra, não apenas consideração pelos jornais mas também pelo seu editor. E ilustra o enorme esforço de Gomes Teixeira em fundir o conhecimento científico nacional com a dos outros países.

Apresenta-se nesta secção em forma de tabela, a evolução do número de artigos relacionados com séries que foram publicados nos jornais de Teixeira, juntamente com a listagem dos mesmos.

Volume	Artigos relacionados com séries	Ano
1	0	1877
2	0	1878
3	0	1881
4	0	1882
5	0	1883
6	0	1885
7	2	1886
8	6	1887
9	3	1889
10	3	1891
11	3	1892
12	1	1894
13	0	1897
14	0	1900
15	1	1902

Tab. 2.6: *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*

Volume	Artigos relacionados com séries	Ano
1	1	1905
2	2	1907
3	0	1908
4	0	1909
5	0	1909
6	1	1911
7	0	1912
8	0	1913
9	0	1914
10	0	1915
11	0	1916
12	0	1917
13	0	1918
14	0	1920

Tab. 2.7: *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*.

²<http://www.fc.up.pt/fa/>

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas

Vol. 7 **M. Lerch** Remarques sur la théorie des séries. *Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira.*

E. Cesàro Remarques sur la théorie des séries. *Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira.*

Vol. 8 **E. Cesàro** Remarques sur la théorie de séries.

F. G. Teixeira Sobre o desenvolvimento em série de funções de variáveis imaginárias.

A. Gutzmer Sur une série considérée par M. Lerch.

J. M. Rodrigues Nota sobre a série de Lagrange.

A. Gutzmer Remarques sur la théorie des séries.

M. Ed. Weyr Deux remarques relatives aux séries.

Vol. 9 **M. Cesàro** Remarques sur divers articles concernant la théorie des series.

A. Gutzmer Note sur un point de la théorie des séries.

M. d'Ocagne Sur le développement de $\sin n\phi$ et de $\cos n\phi$ suivant les puissances de $\sin \phi$.

Vol. 10 **F. G. Teixeira** Sobre o desenvolvimento de funções em série ordenada segundo as potências de senos e cosenos.

E. Cesàro Nouvelles remarques sur divers articles concernant la théorie des séries.

M. Lerch Sur un série.

Vol. 11 **Ch. V. Poussin** Note sur les séries dont les termes sont fonctions d'une variable complexe.

M. Lerch Sur la différentiation des séries.

S. Pincherle Sur les séries des fonctions.

Vol. 12 **J. B. Cabedo** Sobre os coeficientes da série de Fourier.

Vol. 15 **F. Siberiani** Un teorema delle teorie delle serie di potenza.

Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto

Vol. 1 **N. Nielsen** Sur les séries neumanniennes de fonctions sphériques.

Vol. 2 **N. Nielsen** Sur les séries de fonctions sphériques et hypergéométriques.

M. Lerch Sur une application de la théorie de la fonction $R(w, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w + \nu)^s}$.

Vol. 6 **M.L. Orlando** Sur la continuité des séries

Capítulo 3

Análise do primeiro artigo

Ao longo dos artigos que servem de base para esta dissertação, Gomes Teixeira usa factos e apresenta resultados que não estão completamente explicados. Peças de um puzzle que, para quem não está completamente dentro da matéria que Gomes Teixeira estudava na altura, formam verdadeiros quebra-cabeças que podem ser entrave à compreensão do seu trabalho.

O primeiro desses artigos refere-se ao desenvolvimento de funções em série de potências de senos e co-senos. Nessa série surgem coeficientes que acompanham as potências das funções trigonométricas, e é o seu cálculo que ocupa a maior parte do artigo. Gomes Teixeira preocupou-se em apresentar também, aplicações da teoria exposta. A análise dessas aplicações apenas foi referida nesta dissertação quando o relevo teórico das mesmas a isso obrigava. Outras, porque a sua análise seria apenas uma repetição da teoria que as antecedia, não são referidas.

Ainda assim, procurou-se fazer um tratamento cuidado e minucioso da teoria e fazer o levantamento de possíveis incorrecções no artigo original.

Datado de 1896, com publicação no *Journal für die reine und angewandte Mathematik* ou *Journal de Crelle*, este estudo de Gomes Teixeira funciona quase como um tubo de ensaio para o artigo que se analisa no capítulo seguinte, pois trata um caso específico da teoria aí presente.

3.1 Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable

3.1.1 Sur les développements de $f(x)$ suivant les puissances de $\sin x$ qui ont lieu dans une aire limitée

Como primeiro passo de aproximação ao desenvolvimento de funções em séries de potências de \sin e \cos , Gomes Teixeira aborda os desenvolvimentos que apresentam apenas potências de \sin .

Teixeira considera um conjunto de condições iniciais:

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une aire A , x l'affixe d'un point quelconque de l'intérieur de cette aire et supposons que l'équation $\sin z = 0$ n'a qu'une seule racine dans l'aire considérée et que x est assez peu différent de cette racine pour qu'il soit

$$|\sin x| < |\sin z|.$$

TEIXEIRA 1896, p.106

Porque o desenvolvimento a que se propõe chegar é:

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin x + \dots + A_n \sin^n x + \dots, \quad (3.1.1)$$

Gomes Teixeira procura um integral que lhe permita a esse desenvolvimento, fazendo uso das condições pré-estabelecidas. Considera, por isso, o integral

$$\int_s \frac{f(z) \cos(z) dz}{\sin z - \sin x}$$

o que, juntamente com o facto de o denominador da função integranda ter apenas uma raiz na área considerada, e usando a fórmula integral de Cauchy, concluir que:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos z dz}{\sin z - \sin x}. \quad (3.1.2)$$

Demonstração. O caminho de 3.1.2 até 3.1.1 é simples de perceber tendo em conta um desenvolvimento análogo ao conhecido para $\frac{1}{1-x}$ quando $|x| < 1$.

Sabemos por hipótese, que:

$$|\sin x| < |\sin z|.$$

assim sendo, também podemos afirmar

$$\left| \frac{\sin x}{\sin z} \right| = \frac{|\sin x|}{|\sin z|} < 1$$

e fazer

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin z - \sin x} &= \frac{1}{\sin z} \frac{1}{1 - \frac{\sin x}{\sin z}} \\ &= \frac{1}{\sin z} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin z} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 z} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{\sin z} + \frac{\sin x}{\sin^2 z} + \frac{\sin^2 x}{\sin^3 z} + \dots \end{aligned}$$

Transportando este resultado para o integral 3.1.2 ficamos com:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_s f(z) \cos(z) \left(\frac{1}{\sin z} + \frac{\sin x}{\sin^2 z} + \frac{\sin^2 x}{\sin^3 z} + \dots \right) dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos(z)}{\sin z} + \frac{f(z) \cos(z)}{\sin^2 z} \sin x + \frac{f(z) \cos(z)}{\sin^3 z} \sin^2 x + \dots dz \\ &= \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos(z)}{\sin z} dz}_{A_0} + \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos(z)}{\sin^2 z} dz}_{A_1} \sin x + \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos(z)}{\sin^3 z} dz}_{A_2} \sin^2 x + \dots \end{aligned}$$

□

É, então, lógico concluir que os coeficientes A_0, A_1, A_2, \dots têm a forma:

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{n+1} z} \quad (3.1.3)$$

Mas Gomes Teixeira apresenta-nos outro resultado:

$$A_n = \frac{1}{2ni\pi} \int_s \frac{f'(z) dz}{\sin^n z} \quad (3.1.4)$$

a que conseguimos chegar usando a integração por partes em 3.1.3.

Demonstração. Fazendo

$$u = f(z), \quad u' = f'(z), \quad v' = \frac{\cos z}{\sin^{n+1} z}, \quad v = -\frac{1}{n \sin^n z}$$

ficamos com

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{n+1} z} &= -\frac{1}{2i\pi} \left(\frac{f(z)}{n \sin^n z} - \int_s \frac{f'(z)}{n \sin^n z} dz \right) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \frac{f(z)}{n \sin^n z} + \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f'(z)}{n \sin^n z} dz \\ &= \frac{1}{2ni\pi} \int_s \frac{f'(z)}{\sin^n z} dz.\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{f(z)}{n \sin^n z} = 0$$

porque estamos a considerar a integração sobre um caminho fechado s . □

Segundo Gomes Teixeira:

La question précédente nous conduit à chercher une aire telle que, pour tout point x à l'intérieur et pour tout point z du contour, on ait

$$|\sin x| < |\sin z|.$$

Pour résoudre cette question on doit étudier les courbes définies par l'équation

$$|\sin z| = c$$

TEIXEIRA 1896, p.107

Recorrendo às novas tecnologias, especificamente ao MuPAD¹, podemos facilmente visualizar o gráfico de $|\sin z|$:

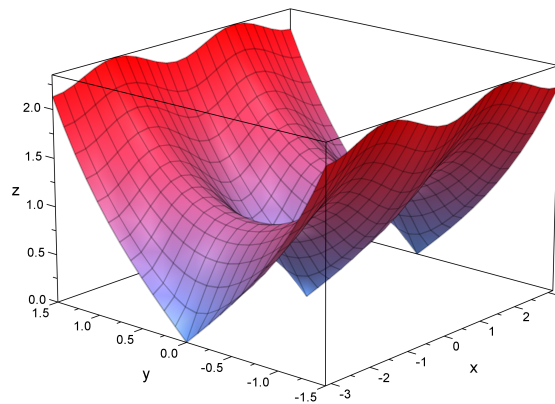


Fig. 3.1: Gráfico de $|\sin z|$.

¹Informação sobre este software em <http://www.sciface.com/>.

E adicionar-lhe os contornos gerados pela equação $|\sin z| = c$:

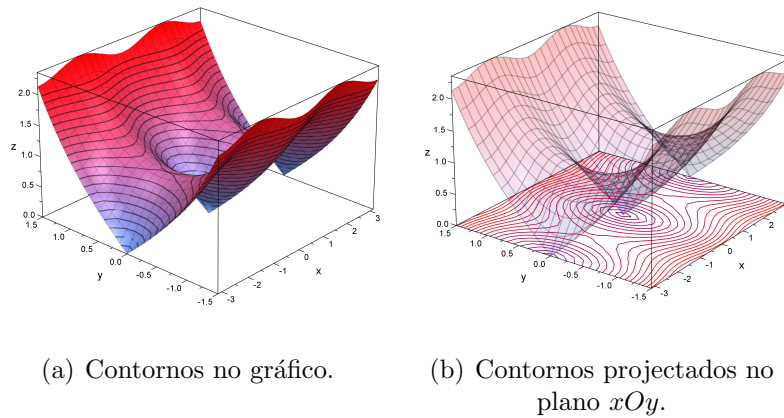


Fig. 3.2: Contornos obtidos para diferentes valores de c .

Da visualização concluímos a existência de desenhos distintos nos contornos considerados. Um primeiro grupo, formado por um número infinito de elipses, obtém-se quando $0 < c \leq 1$, e o segundo, quando $c > 1$, em que temos uma banda infinita para cada c .

Nos gráficos seguintes² essa distinção torna-se ainda mais evidente.

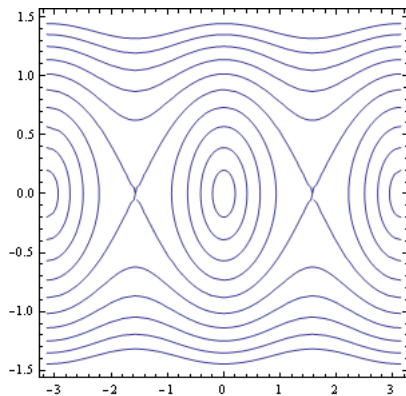


Fig. 3.3: Contornos resultantes do gráfico de $|\sin z|$.

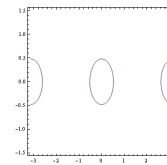


Fig. 3.4: Ex. de contorno para $c < 1$.

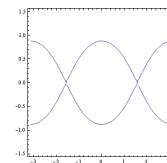


Fig. 3.5: Ex. de contorno para $c = 1$.

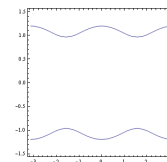


Fig. 3.6: Ex. de contorno para $c > 1$.

Gomes Teixeira dedicou grande parte deste artigo à identificação destes casos, e ao desenvolvimento de funções em série para cada um deles.

²Para os gráficos referidos foi utilizado o Mathematica 6.0.

Começou por colocar $z = x_1 + iy_1$ e desenvolver a equação $|\sin z| = c$:

(...) en posant $z = x_1 + iy_1$,

$$+\sqrt{\sin^2 x_1 \cos^2 iy_1 - \cos^2 x_1 \sin^2 iy_1} = c \quad (3.1.5)$$

TEIXEIRA 1896, p.107

Demonstração.

$$\begin{aligned} |\sin z| = c &\Leftrightarrow \\ |\sin(x_1 + iy_1)| = c &\Leftrightarrow \\ \sqrt{\sin(x_1 + iy_1) \cdot \sin(x_1 - iy_1)} = c &\Leftrightarrow \\ \sqrt{(\sin x_1 \cos iy_1 + \sin iy_1 \cos x_1)(\sin x_1 \cos iy_1 - \sin iy_1 \cos x_1)} = c &\Leftrightarrow \\ \sqrt{\sin^2 x_1 \cos^2 iy_1 - \cos^2 x_1 \sin^2 iy_1} = c \end{aligned}$$

□

E é a partir da análise de 3.1.5 que Gomes Teixeira tira as suas conclusões sobre o contorno que determinado c gera.

On voit immédiatement que y_1 est une fonction périodique de x_1 dont la période est égale à π ; il suffit donc d'étudier la partie de chaque courbe qui corresponde aux valeurs de x_1 comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On voit aussi que la courbe est symétrique par rapport aux axes des coordonnées; il suffit donc d'étudier la partie correspondant aux valeurs positives de x_1 et y_1 .

TEIXEIRA 1896, p.107

Tendo em conta estas condições, a parte do gráfico que estamos a considerar é:

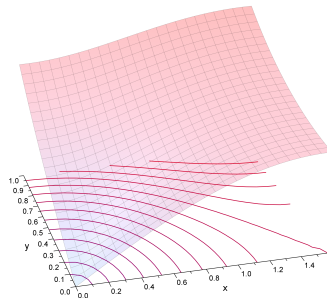


Fig. 3.7: Porção do gráfico considerado no estudo.

Com esta conclusão, Gomes Teixeira reduz o seu estudo ao primeiro quadrante, não ficando totalmente claro se os extremos dos intervalos referidos são pontos considerados ou não. Se estes não foram tomados em consideração então todos os pontos do tipo $(x_1, 0)$ são descartados, o que levanta algumas dúvidas especialmente em $(\frac{\pi}{2}, 0)$ como veremos mais adiante.

Devido à falta de ferramentas que possibilitassem a visualização destes gráficos, Gomes Teixeira recorreu à análise para mostrar o comportamento das funções e o desenho dos contornos. E para demonstrar que para determinados valores de c temos elipses e para outros bandas infinitas, analisou os pontos de inflexão existentes em cada contorno. Se estes não existirem, temos elipses; se existirem periodicamente, temos bandas infinitas.

Começou por estudar os casos em que $c \leq 1$, e ver quais os pontos que obtinha quando $x_1 = 0$ e quando $y_1 = 0$ chegando aos resultados $(0, \log(c + \sqrt{c^2 + 1}))$ e $(\arcsin c, 0)$.

Demonstração. Se $x_1 = 0$ então a equação 3.1.5 reduz-se a

$$\sqrt{-\sin^2 iy_1} = c.$$

Sabemos que $\sin^2 iy_1 = 1 - \cos^2 iy_1$, portanto

$$\begin{aligned}\sqrt{-1 + \cos^2 iy_1} &= c \Leftrightarrow \\ -1 + \cos^2 iy_1 &= c^2 \Leftrightarrow \\ \cos^2 iy_1 &= c^2 + 1 \Leftrightarrow \\ \cos iy_1 &= \sqrt{c^2 + 1}.\end{aligned}$$

Mas temos também $\cos iy_1 = \frac{e^{-y_1} + e^{y_1}}{2}$, e assim

$$\begin{aligned}\frac{e^{-y_1} + e^{y_1}}{2} &= \sqrt{c^2 + 1} \Leftrightarrow \\ e^{-y_1} + e^{y_1} &= 2\sqrt{c^2 + 1} \Leftrightarrow \\ 1 + (e^{y_1})^2 &= 2\sqrt{c^2 + 1}e^{y_1} \Leftrightarrow \\ (e^{y_1})^2 - 2\sqrt{c^2 + 1}e^{y_1} + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Fazendo $e^{y_1} = x$ ficamos com $x^2 - 2\sqrt{c^2 + 1}x + 1 = 0$ e aplicando a fórmula resolvente

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2\sqrt{c^2+1} \pm \sqrt{4(c^2+1)-4}}{2} \Leftrightarrow \\
x &= \sqrt{c^2+1} \pm \frac{\sqrt{4c^2+4-4}}{2} \Leftrightarrow \\
x &= \sqrt{c^2+1} \pm c \Leftrightarrow \\
e^{y_1} &= \sqrt{c^2+1} \pm c \Leftrightarrow \\
y_1 &= \log \left(\sqrt{c^2+1} \pm c \right).
\end{aligned}$$

Como estamos no caso de $c \leq 1$, temos $y = \log(\sqrt{c^2+1} - c) < 0$ para $c < 1$, visto que por hipótese apenas consideramos o primeiro quadrante ($y > 0$) a solução para esses valores de c terá que ser $\log(\sqrt{c^2+1} + c)$.

Passamos agora para o caso em que $y_1 = 0$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sin^2 x_1} &= c \Leftrightarrow \\
\sin^2 x_1 &= c^2 \Leftrightarrow \\
\sin x_1 &= \pm c \Leftrightarrow \\
x_1 &= \arcsin \pm c \Leftrightarrow \\
x_1 &= \pm \arcsin c.
\end{aligned}$$

Mais uma vez, porque estamos a considerar o primeiro quadrante, ficamos com $x_1 = \arcsin c$. □

En posant dans l'équation 3.1.5 $1 - \cos^2 iy_1$ au lieu de $\sin^2 iy_1$ et en la résolvant ensuite, il vient

$$\cos^2 iy_1 = c^2 + \cos^2 x_1 \quad (3.1.6)$$

TEIXEIRA 1896, p.107

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sin^2 x_1 \cos^2 iy_1 - \cos^2 x_1 (1 - \cos^2 iy_1)} &= c \\
\sqrt{\sin^2 x_1 \cos^2 iy_1 - \cos^2 x_1 + \cos^2 x_1 \cos^2 iy_1} &= c \\
(\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1) \cos^2 iy_1 - \cos^2 x_1 &= c^2 \\
\cos^2 iy_1 &= c^2 + \cos^2 x_1.
\end{aligned}$$

□

Do resultado anterior sai que

$$\frac{e^{-y_1} + e^{y_1}}{2} = \pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1}.$$

E, segundo Gomes Teixeira,

Cette équation donne la suivante

$$y_1 = \log \left[\pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} \pm \sqrt{c^2 - \sin^2 x_1} \right] \quad (3.1.7)$$

TEIXEIRA 1896, p.108

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-y_1} + e^{y_1}}{2} &= \pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} \Leftrightarrow \\
e^{-y_1} + e^{y_1} &= \pm 2 \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} \Leftrightarrow \\
1 + e^{y_1} - \left(\pm 2 \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} e^{y_1} \right) &= 0.
\end{aligned}$$

Pondo $e^{y_1} = x$ ficamos com $x^2 - (\pm 2 \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1}) x + 1 = 0$ e mais uma vez, aplicando a fórmula resolvente

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\pm 2 \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} \pm \sqrt{(2 \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1})^2 - 4}}{2} \Leftrightarrow \\
x &= \pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} \pm \sqrt{c^2 + (\cos^2 x_1 - 1)} \Leftrightarrow \\
e^{y_1} &= \pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} \pm \sqrt{c^2 - \sin^2 x_1} \Leftrightarrow \\
y_1 &= \log \left(\pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} \pm \sqrt{c^2 - \sin^2 x_1} \right).
\end{aligned}$$

□

Cette égalité fait voir, en premier lieu, que y_1 est imaginaire quand $x_1 > \arcsin c$. Pour chaque valeur de x_1 , inférieur à $\arcsin c$, elle donne pour y_1 deux valeurs réelles et deux valeurs imaginaires. Des deux valeurs réelles on ne doit choisir que celle qui, pour $x_1 = 0$, donne pour y_1 la valeur $\log(c + \sqrt{c^2 + 1})$, c'est-à-dire la valeur

$$y_1 = \log \left[\sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} + \sqrt{c^2 - \sin^2 x_1} \right] \quad (3.1.8)$$

TEIXEIRA 1896, p.108

Demonstração. A primeira conclusão presente no parágrafo acima, é que se $x_1 > \arcsin c$ então y_1 é imaginário. De facto, nessas condições temos que $c^2 - \sin^2 x_1 < 0$ e portanto $\sqrt{c^2 - \sin^2 x_1}$ tem valor complexo.

Outra conclusão refere-se à escolha dos sinais para 3.1.8. Assim, quando $x_1 < \arcsin c$ temos

$$\begin{aligned} \sin^2 x_1 &< \sin^2 (\arcsin c) \Leftrightarrow \\ \sin^2 x_1 &< (\sin (\arcsin c))^2 \Leftrightarrow \\ \sin^2 x_1 &< c^2 \Leftrightarrow \\ 1 - \cos^2 x_1 &< c^2 \Leftrightarrow \\ -\cos^2 x_1 &< c^2 - 1 \Leftrightarrow \\ \cos^2 x_1 &> 1 - c^2. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Por 3.1.9 temos $c^2 - \sin^2 x_1 < c^2$ e por hipótese $c^2 - \sin^2 x_1 < 1$. Já por 3.1.10 sai que $c^2 + \cos^2 x_1 > 1$.

Os valores complexos serão então:

- $\log \left[-\sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} - \sqrt{c^2 - \sin^2 x_1} \right];$
- $\log \left[-\sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} + \sqrt{c^2 - \sin^2 x_1} \right].$

Os valores reais:

- $\log \left[+\sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} - \sqrt{c^2 - \sin^2 x_1} \right];$
- $\log \left[+\sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} + \sqrt{c^2 - \sin^2 x_1} \right].$

Como queremos os valores reais, mas para além disso, aqueles que são positivos, escolhemos:

$$y_1 = \log \left[+\sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} + \sqrt{c^2 - \sin^2 x_1} \right].$$

Mas será $\log \left[+\sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} - \sqrt{c^2 - \sin^2 x_1} \right]$ negativo?

$$\begin{aligned} & \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} - \sqrt{c^2 - \sin^2 x_1} = \\ & \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} - \sqrt{c^2 - 1 + \cos^2 x_1} = \\ & \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} - \sqrt{-(1 - c^2) + \cos^2 x_1} < \\ & \sqrt{c^2 + 1 - c^2} - \sqrt{-\cos^2 x_1 + \cos^2 x_1} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

Sendo assim $\sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} - \sqrt{c^2 - \sin^2 x_1} < 1$ e portanto

$$\log \left[+\sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} - \sqrt{c^2 - \sin^2 x_1} \right] < 0.$$

□

É a partir da equação 3.1.8 que Gomes Teixeira identifica quais os contornos que resultam das diferentes curvas de nível c , analisando a primeira e segunda derivadas da função y_1 . Diz-nos Gomes Teixeira:

On obtient au moyen de cette équation (3.1.8) tous les points de la courbe considérée correspondants aux valeurs de x_1 comprises entre 0 et $\arcsin c$, et l'on voit que y_1 croît depuis 0 jusqu'à $\log [c + \sqrt{c^2 + 1}]$, quand x_1 décroît depuis $\arcsin c$ jusqu'à 0.

TEIXEIRA 1896, p.108

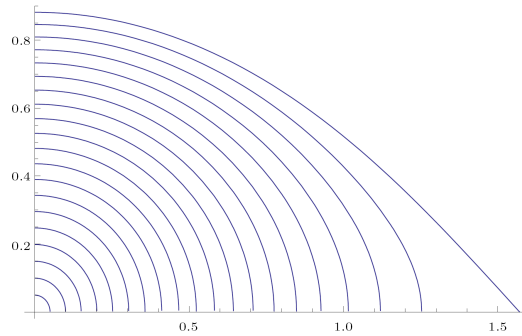


Fig. 3.8: Gráfico de 3.1.8 para alguns $c \leq 1$.

Surge então o valor para a derivada de y_1 .

$$y_1' = \frac{\sin 2x_1}{i \sin 2iy_1} \quad (3.1.11)$$

Demonstração. Podemos chegar a 3.1.11 usando a expressão 3.1.6:

$$\cos^2 iy_1 = c^2 + \cos^2 x_1$$

Derivamos ambos os membros e obtemos:

$$\begin{aligned} -2 \cos iy_1 (iy_1)' \sin iy_1 &= -2 \cos x_1 \sin x_1 \Leftrightarrow \\ iy_1' &= \frac{-2 \cos x_1 \sin x_1}{-2 \cos iy_1 \sin iy_1} \Leftrightarrow \\ y_1' &= \frac{\sin 2x_1}{i \sin 2iy_1} \end{aligned}$$

□

Esta equação

(...) donne les tangents à la courbe et fait voir que les tangentes dans les extrémités des axes sont perpendiculaires à l'axe correspondant

TEIXEIRA 1896, p.108

Os extremos são $A_{\curvearrowright}(\arcsin c, 0)$ e $B_{\curvearrowright}(0, \log(c + \sqrt{c^2 + 1}))$.

De facto, quando estamos em A ficamos com

$$\frac{\sin(2 \arcsin c)}{i \sin 0} = \frac{\sin(2 \arcsin c)}{0} = \infty$$

o que significa que neste ponto a recta tangente é perpendicular ao eixo das abcissas.

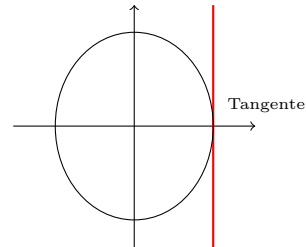


Fig. 3.9: Exemplo de tangente no ponto A

Quando vamos para o ponto B temos

$$\frac{\sin 0}{i \sin (2i \log (c + \sqrt{c^2 + 1}))} = 0$$

que nos indica estarmos perante uma recta paralela ao eixo das abcissas.

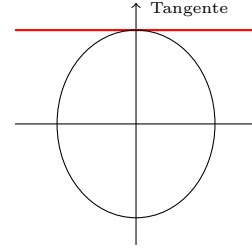


Fig. 3.10: Exemplo de tangente no ponto B

No ponto B , poderíamos ter o caso de uma indeterminação $\frac{0}{0}$, mas nesse caso teríamos

$$\begin{aligned} \sin \left(2i \log \left(c + \sqrt{c^2 + 1} \right) \right) &= 0 \Rightarrow \\ 2i \log \left(c + \sqrt{c^2 + 1} \right) &= 0 \Leftrightarrow \\ c + \sqrt{c^2 + 1} &= 1 \Rightarrow \\ c^2 + 1 &= (1 - c)^2 \Leftrightarrow \\ c^2 + 1 &= 1 - 2c + c^2 \Leftrightarrow \\ 2c &= 0 \Leftrightarrow c = 0 \end{aligned}$$

Isso significa que só teríamos a indeterminação no caso em que $c = 0$ e aí a elipse reduz-se a apenas um ponto, pelo que não vamos considerar as tangentes.

Les point d'inflexion de la courbe sont donnés par l'élimination de y_1 entre l'équation

$$\sin^2 2x_1 \cos 2iy_1 = \cos 2x_1 \sin^2 2iy_1$$

et l'équation

$$\cos 2iy_1 = 2c^2 + \cos 2x_1$$

qui résulte de 3.1.5. On trouve de cette manière l'équation

$$\cos 2x_1 = -c^2 \pm \sqrt{c^4 - 1}$$

laquelle fait voir que la courbe n'a pas de point d'inflexion quand $c \leq 1$.

TEIXEIRA 1896, p.108

Demonstração. Na citação anterior há vários passos que merecem um olhar mais atento.

- De onde surge a equação $\sin^2 2x_1 \cos 2iy_1 = \cos 2x_1 \sin^2 2iy_1$?

Sendo a finalidade de Gomes Teixeira encontrar o pontos de inflexão, é lógico que fosse calcular os zeros da segunda derivada de y_1 . Teria então,

$$\begin{aligned} y_1'' &= \frac{(\sin 2x_1)' (\sin 2x_1) - (\sin 2x_1) (i \sin 2iy_1)'}{(i \sin 2iy_1)^2} \Leftrightarrow \\ y_1'' &= \frac{2i \cos 2x_1 \sin 2iy_1 - 2 \sin 2x_1 (y_1' i^2 \cos 2iy_1)}{i^2 \sin^2 2iy_1} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Substituímos y' segundo 3.1.11 e ficamos com

$$\begin{aligned} y_1'' &= \frac{2 \cos 2x_1}{i \sin 2iy_1} - \frac{2 \sin 2x_1 \frac{\sin 2x_1}{i \sin 2iy_1} i^2 \cos 2iy_1}{i^2 \sin^2 2iy_1} \Leftrightarrow \\ y_1'' &= \frac{2 \cos 2x_1}{i \sin 2iy_1} - \frac{2 \sin^2 2x_1 i^2 \cos 2iy_1}{i^3 \sin^3 2iy_1} \end{aligned}$$

Resolvemos agora a equação $y_1'' = 0$ para encontrar os pontos de inflexão.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2 \cos 2x_1}{i \sin 2iy_1} - \frac{2 \sin^2 2x_1 i^2 \cos 2iy_1}{i^3 \sin^3 2iy_1} \Leftrightarrow \\ \frac{2 \cos 2x_1}{i \sin 2iy_1} &= \frac{2 \sin^2 2x_1 i^2 \cos 2iy_1}{i^3 \sin^3 2iy_1} \Leftrightarrow \\ \frac{2i^3 \cos 2x_1 \sin^3 2iy_1}{i \sin 2iy_1} &= 2i^2 \sin^2 2x_1 \cos 2iy_1 \Leftrightarrow \\ 2i^2 \cos 2x_1 \sin^2 2iy_1 &= 2i^2 \sin^2 2x_1 \cos 2iy_1 \Leftrightarrow \\ \cos 2x_1 \sin^2 2iy_1 &= \sin^2 2x_1 \cos 2iy_1 \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

- Como é que de 3.1.5 chegamos a $\cos 2iy_1 = 2c^2 + \cos 2x_1$?

De

$$\cos^2 iy_1 = c^2 + \cos^2 x_1$$

que podemos encontrar deduzida na página 18, e tendo em conta que

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2},$$

ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\cos 2iy_1 + 1}{2} &= c^2 + \frac{\cos 2x_1 + 1}{2} \Leftrightarrow \\ \cos 2iy_1 + 1 &= 2c^2 + \cos 2x_1 + 1 \Leftrightarrow \\ \cos 2iy_1 &= 2c^2 + \cos 2x_1. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

- Como chegar a $\cos 2x_1 = -c^2 \pm \sqrt{c^4 - 1}$?

Usando 3.1.12 e 3.1.13 resulta que

$$\begin{aligned} \sin^2 2x_1 (2c^2 + \cos 2x_1) &= \cos 2x_1 (1 - \cos^2 2iy_1) \Leftrightarrow \\ (1 - \cos^2 2x_1) (2c^2 + \cos 2x_1) &= \cos 2x_1 (1 - (2c^2 + \cos 2x_1)^2) \Leftrightarrow \\ 2c^2 + \cos 2x_1 - 2c^2 \cos 2x_1 - \cos^3 2x_1 &= \cos 2x_1 - 4c^4 \cos 2x_1 - 4c^2 \cos^2 2x_1 - \cos^3 2x_1 \Leftrightarrow \\ 2c^2 \cos^2 2x_1 + 4c^4 \cos 2x_1 + 2c^2 &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo $\cos 2x_1 = y$ temos

$$2c^2 y^2 + 4c^4 y + 2c^2 = 0.$$

Aplicando a fórmula resolvente,

$$\begin{aligned} y &= \frac{-4c^4 \pm \sqrt{(4c^4)^2 - 4 \cdot 2c^2 \cdot 2c^2}}{2 \cdot 2c^2} \Leftrightarrow \\ y &= \frac{-4c^4 \pm \sqrt{(4c^4)^2 - 4^2 c^4}}{4c^2} \Leftrightarrow \\ y &= \frac{-4c^4 \pm 4c^2 \sqrt{c^4 - 1}}{4c^2} \Leftrightarrow \\ y &= -c^2 \pm \sqrt{c^4 - 1} \end{aligned}$$

e portanto

$$\cos 2x_1 = -c^2 \pm \sqrt{c^4 - 1}.$$

E por último,

- Porque é que a curva não tem pontos de inflexão quando $c \leq 1$?

Vamos considerar dois casos distintos: $c < 1$ e $c = 1$.

Quando $c < 1$ sabemos que $c^4 - 1 < 0$ e por isso $\sqrt{c^4 - 1}$ é um número complexo. Como x_1 é real, $\cos 2x_1$ também o é, e portanto nunca teremos a igualdade

$$\cos 2x_1 = -c^2 \pm \sqrt{c^4 - 1}.$$

Mas quando $c = 1$ temos

$$\begin{aligned}\cos 2x_1 &= -1 \pm \sqrt{0} \Leftrightarrow \\ \cos 2x_1 &= -1 \Leftrightarrow \\ 2x_1 &= \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi\end{aligned}$$

A equação é neste caso possível! Este facto remete-nos para uma questão levantada na página 17, sobre a inclusão, ou não, dos pontos extremos do intervalo que Gomes Teixeira considerou no estudo. As conclusões apresentadas nesta fase, levam-nos a supor que esses pontos não foram tidos em conta. Só assim se justifica o facto de não considerar $x_1 = \frac{\pi}{2}$ como um ponto de inflexão.

Sendo assim, as curvas resultantes de $c \leq 1$ não apresentam pontos de inflexão, o que prova que estamos na presença de elipses, como já tínhamos verificado nos gráficos. \square

Deste estudo, conclui Gomes Teixeira que,

(...)la courbe représentée par l'équation $|\sin z| = c$ est, quand $c \leq 1$, composée d'un nombre infini d'ovales égaux, dont les centres sont les points $(0, 0)$, $(0, \pm\pi)$, $(0, \pm 2\pi)$... et dont les axes sont égaux à $2 \arcsin c$ et $2 \log(c + \sqrt{c^2 + 1})$, le premier axe coïncidant avec l'axe des abscisses et le second étant parallèle à l'axe des ordonnées.

TEIXEIRA 1896, p.108

Podemos, confrontando a citação anterior com o gráfico 3.2(b), detectar uma incorrecção no que respeita aos pontos que formam os centros das elipses. Na realidade esses pontos são $(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$

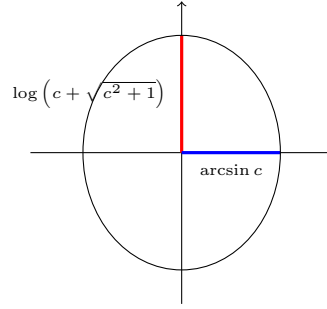


Fig. 3.11: Semi-eixos da ellipse

Depois disto, Gomes Teixeira passa a abordar o caso em que $c > 1$. Diz-nos:

Au moyen d'une discussion semblable, on voit qu'alors la courbe $|\sin z| = c$ a seulement deux branches, symétriques par rapport à l'axe des abscisses, et que s'étendent jusqu'à l'infini dans le sens des abscisses positives et dans celui des abscisses négatives, en faisant une série d'ondulations d'amplitude égale à π .

TEIXEIRA 1896, p.109

Demonstração. Gomes Teixeira não demonstrou os factos descritos na afirmação anterior, e por isso vamos apresentar aqui algumas ideias que vão de encontro à citação apresentada.

Comecemos por considerar de novo a equação 3.1.5. Fazendo $x_1 = 0$ e depois $y_1 = 0$, obtemos, tal como antes, $y_1 = \log(c + \sqrt{c^2 + 1})$ e $x_1 = \arcsin c$ respectivamente.

Mas como agora $c > 1$, torna-se impossível em \mathbb{R} ter $\arcsin c$. Assim concluimos que para estes valores de c , não existem intersecções com o eixo das abcissas (não existem zeros).

□

Voltemos ao desenvolvimento 3.1.1. Gomes Teixeira menciona a teoria dos resíduos como forma de determinar os coeficientes A_n , mas propõe-se a apresentar um método mais simples.

Para explicar a aplicação desse método, começa por considerar a ellipse que tem centro na origem das coordenadas e a partir do desenvolvimento de $f(x)$ determinar cada A_n recorrendo às derivadas da função e supondo $x = 0$.

Recordemos o desenvolvimento:

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin x + \dots + A_n \sin^n x + \dots$$

Teríamos então:

$$\begin{aligned}
f(0) &= A_0, \\
f'(0) &= A_1, \\
f''(0) &= 2A_2, \\
f'''(0) &= -A_1 + 6A_3, \\
f^{IV}(0) &= -8A_2 + 24A_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^V(0) &= A_1 - 60A_3 + 120A_5, \\
f^{VI}(0) &= 32A_2 - 480A_4 + 720A_6, \\
&\dots
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(0), \\
A_1 &= f'(0), \\
A_2 &= \frac{1}{2}f''(0), \\
A_3 &= \frac{1}{6} [f'''(0) + f'(0)], \\
A_4 &= \frac{1}{24} [f^{IV}(0) + 4f''(0)], \\
A_5 &= \frac{1}{120} [f^V(0) + 10f'''(0) + 9f'(0)], \\
A_6 &= \frac{1}{720} [f^{VI}(0) + 20f^{IV}(0) + 64f''(0)], \\
&\dots
\end{aligned}$$

TEIXEIRA 1896, p.109

O texto original de Gomes Teixeira apresenta uma pequena gralha tipográfica no cálculo de A_4 , tal como se pode ver na figura:

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(0), \\
A_1 &= f'(0), \\
A_2 &= \frac{1}{2} f''(0), \\
A_3 &= \frac{1}{6} [f'''(0) + f'(0)], \\
A_4 &= \frac{1}{24} [f^{IV}(0) + 4f''(0)], \\
A_5 &= \frac{1}{120} [f^V(0) + 10f'''(0) + 9f'(0)], \\
A_6 &= \frac{1}{720} [f^{VI}(0) + 20f^{IV}(0) + 64f''(0)], \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Fig. 3.12: Gralha no cálculo de A_4 .

Como se poderá compreender, onde está $f''(6)$ deveria estar $f''(0)$.
É clara a existência de uma regularidade no cálculo dos A_n , e de facto:

En général, nous pouvons écrire

$$\begin{cases} A_{2n} &= K [f^{(2n)}(0) + A f^{(2n-2)}(0) + \dots + L f^{(2)}(0)] , \\ A_{2n+1} &= K' [f^{(2n+1)}(0) + A' f^{(2n-1)}(0) + \dots + L' f'(0)] , \end{cases} \quad (3.1.14)$$

où $K, K', A, A', \dots, L, L'$ représentent des quantités constantes que nous allons déterminer.

TEIXEIRA 1896, p.110

Para determinar K', A', \dots, L' , Gomes Teixeira diz-nos o seguinte:

Considérons dans ce but la fonction $\sin kx$, où k est un nombre entier impair, dont le développement suivant est donné dans les éléments de trigonométrie:

$$\begin{aligned} \sin kx &= k \sin x - k \frac{k^2 - 1^2}{3!} \sin^3 x + \dots + \\ &+ (-1)^n k \frac{(k^2 - 1^2)(k^2 - 3^2) \dots (k^2 - (2n-1)^2)^2}{(2n+1)!} \sin^{2n+1} x - \dots \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

TEIXEIRA 1896, p.110

Gomes Teixeira escolheu a função seno porque quer encontrar os coeficientes que acompanham as potências ímpares da função, e k ímpar para poder obter mais facilmente o desenvolvimento de $\sin kx$ somente com potências de \sin .

Encontramos aqui uma pequena imprecisão no texto de Gomes Teixeira. No final do desenvolvimento apresentado em 3.1.15, temos um sinal negativo, no entanto, não é possível inferir sobre o sinal da parcela que se segue, tal como não o podemos fazer para a parcela imediatamente anterior:

$$(-1)^n k \frac{(k^2 - 1^2)(k^2 - 3^2) \dots (k^2 - (2n-1)^2)^2}{(2n+1)!} \sin^{2n+1} x$$

pois este sinal está dependente de $(-1)^n$. Assim, parece-nos mais acertado o uso de \pm .

Demonstração. Para demonstrar este desenvolvimento, vamos recorrer à identidade de de Moivre:

$$e^{i(kx)} = (e^{ix})^k$$

que, usando a fórmula de Euler, se transforma em:

$$\cos(kx) + i \sin(kx) = (\cos x + i \sin x)^k. \quad (3.1.16)$$

E fazemos a expansão do binómio usando a fórmula:

$$(\cos x + i \sin x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} \cos^n x (i \sin x)^{k-n}$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^k &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} \cos^n x (i \sin x)^{k-n} \\ &= \cos^k x + \binom{k}{1} \cos^{k-1} x (i \sin x) + \binom{k}{2} \cos^{k-2} x (i \sin x)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Desta soma, porque aquilo que queremos é o desenvolvimento de $\sin kx$, aproveitamos apenas as parcelas complexas, ou seja, aquelas que têm potências ímpares de $i \sin x$. Isso deve-se ao facto de na fórmula 3.1.16, $\sin kx$ estar associado a i .

Ficamos então com

$$\begin{aligned}\sin kx &= \binom{k}{1} \cos^{k-1} x \sin x - \binom{k}{3} \cos^{k-3} x \sin^3 x + \dots + \\ &+ (-1)^n \binom{k}{2n+1} \cos^{k-(2n+1)} x \sin^{2n+1} x + \dots\end{aligned}$$

Como k é ímpar, sabemos que $k-1$ é um número par, façamos $2m = k-1$, e podemos por isso usar $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ para obter

$$\begin{aligned}\sin kx &= \binom{k}{1} \cos^{2m} x \sin x - \binom{k}{3} \cos^{2(m-1)} x \sin^3 x + \dots + \\ &+ (-1)^n \binom{k}{2n+1} \cos^{2(m-n)} x \sin^{2n+1} x + \dots \\ &= \binom{k}{1} (1 - \sin^2 x)^m \sin x - \binom{k}{3} (1 - \sin^2 x)^{m-1} \sin^3 x + \dots + \\ &+ (-1)^n \binom{k}{2n+1} (1 - \sin^2 x)^{m-n} \sin^{2n+1} x + \dots\end{aligned}$$

O passo seguinte será a expansão, usando a mesma técnica, de cada um dos binómios $1 - \sin^2 x$. Exemplificando:

$$(1 - \sin^2 x)^m = 1 - m \sin^2 x + \frac{m(m-1)}{2!} \sin^4 x - \dots + (-1)^m \sin^{2m} x$$

Depois de todas as multiplicações feitas verificamos que com $\sin x$ temos apenas a parcela

$$\binom{k}{1} \sin x = k \sin x.$$

Com $\sin^3 x$ temos

$$\binom{k}{1} \left(-\frac{k-1}{2} \right) \sin^3 x$$

que vem da expansão de

$$\binom{k}{1} (1 - \sin^2 x)^m \sin x$$

e

$$\binom{k}{3} \sin^3 x$$

que se retira da expansão de

$$\binom{k}{3} (1 - \sin^2 x)^{m-1} \sin^3 x.$$

Não existem mais parcelas com $\sin^3 x$ porque a partir daí todas elas têm um factor que é uma potência de $\sin x$ de expoente superior a 3. Juntando essas duas parcelas, obtemos o que queremos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \binom{k}{1} \left(-\frac{k-1}{2}\right) \sin^3 x + \binom{k}{3} \sin^3 x &= -k \frac{k-1}{2} \sin^3 x + \frac{k!}{(k-1)!3!} \sin^3 x \\ &= -k \frac{3(k-1)}{3!} \sin^3 x + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \sin^3 x \\ &= -k \frac{3(k-1) + (k-1)(k-2)}{3!} \sin^3 x \\ &= -k \frac{3k-3+k^2-2k-k+2}{3!} \sin^3 x \\ &= -k \frac{k^2-1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x \end{aligned}$$

Continuando desta forma obtemos o desenvolvimento de $\sin kx$ que Gomes Teixeira propôs. □

Agora, podemos fazer a aplicação do cálculo de A_{2n+1} , tal como nos é apresentado em 3.1.14, relativamente a $\sin kx$.

Numa primeira fase, vamos ver como se comportam as derivadas, de ordem ímpar, da função considerada.

$$\begin{aligned} (\sin kx)' &= k \cos kx = (-1)^0 k \cos kx \\ (\sin kx)''' &= -k^3 \cos kx = (-1)^1 k^3 \cos kx \\ (\sin kx)^v &= k^5 \cos kx = (-1)^2 k^5 \cos kx \\ &\dots \end{aligned}$$

de uma forma geral, a derivada de ordem $2n+1$ é:

$$(-1)^n k^{2n+1} \cos kx. \tag{3.1.18}$$

Segundo o proposto por Gomes Teixeira, temos:

$$\begin{aligned}
A_{2n+1} &= K' [(-1)^n k^{2n+1} \cos 0 + A' (-1)^{n-1} k^{2n-1} \cos 0 + \dots + L' (-1)^0 k \cos 0] \\
&= (-1)^n K' [k^{2n+1} - A' k^{2n-1} + \dots \pm L' k].
\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

É de notar a incerteza no sinal que acompanha $L'k$, de facto este sinal varia conforme o valor n que estivermos a considerar

$$\begin{cases} -L'k, & \text{se } n \text{ par} \\ L'k, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Isso acontece porque se igualou $(-1)^0$ a $(-1)^n (-1)^{-n}$ para colocar $(-1)^n$ em evidência.

En comparant ce résultat au suivant

$$A_{2n+1} = (-1)^n k \frac{(k^2 - 1^2)(k^2 - 3^2) \dots (k^2 - (2n-1)^2)^2}{(2n+1)!}$$

et en représentant par $s_{2n+1}^{(m)}$ la somme des combinaisons des nombres

$$1^2, 3^2, 5^2, \dots, (2n-1)^2$$

pris m à m , on a donc

$$K' = \frac{1}{(2n+1)!}, A' = s_{2n+1}^{(1)}, \dots, L' = s_{2n+1}^{(n)}. \tag{3.1.20}$$

On peut donc écrire en général

$$A_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \dots + s_{2n+1}^{(n)} f'(0)}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} \tag{3.1.21}$$

TEIXEIRA 1896, p.110

A nova notação $s_{2n+1}^{(m)}$, aqui introduzida por Gomes Teixeira, pode gerar alguma confusão e, será mesmo, a maior dificuldade na análise da citação anterior. Vamos, por isso, analisar um exemplo – A_7 – com $n = 3$, para uma melhor compreensão.

$$\begin{aligned}
A_7 &= A_{2 \times 3 + 1} \\
&= (-1)^3 k \frac{(k^2 - 1)(k^2 - 3^2)(k^2 - 5^2)}{7!} \\
&= (-1)^3 k \frac{k^6 - 35k^4 + 259k^2 - 225}{7!} \\
&= (-1)^3 k \frac{k^6 - (5^2 + 3^2 + 1^2)k^4 + (5^2 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 1^2 + 3^2 \cdot 1^2)k^2 - 5^2 3^2 1^2}{7!} \\
&= (-1)^3 \frac{k^7 - (5^2 + 3^2 + 1^2)k^5 + (5^2 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 1^2 + 3^2 \cdot 1^2)k^3 - 5^2 3^2 1^2 k}{7!} \quad (3.1.22)
\end{aligned}$$

É fácil de ver que

- $5^2 + 3^2 + 1^2$ é a soma das combinações de cada um dos números 1^2 , 3^2 e 5^2 , tomados de 1 em 1;
- $5^2 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 1^2 + 3^2 \cdot 1^2$ é a soma das combinações dos mesmos números, 2 a 2;
- $5^2 3^2 1^2$ é o resultado da combinação dos três números considerados, 3 a 3.

Comparando 3.1.22 com 3.1.19, verificam-se os resultados apresentados em 3.1.20, ou seja, com $n = 3$:

$$\begin{aligned}
K' &= \frac{1}{(2 \times 3 + 1)!} = \frac{1}{7!} & A' &= s_{2 \times 3 + 1}^{(1)} = s_7^{(1)}, \\
B' &= s_{2 \times 3 + 1}^{(2)} = s_7^{(2)}, & C' &= s_{2 \times 3 + 1}^{(3)} = s_7^{(3)}.
\end{aligned}$$

Cette formule (3.1.21) peut être encore écrite symboliquement de la manière suivante

$$A_{2n+1} = \frac{f(0) [f^2(0) + 1^2] [f^2(0) + 3^2] \dots [f^2(0) + (2n - 1)^2]}{1 \cdot 2 \dots (2n + 1)} \quad (3.1.23)$$

où l'on doit, après les multiplications, remplacer les puissances de $f(0)$ par des dérivées d'ordre égal à l'exposant de la puissance.

TEIXEIRA 1896, p.111

Demonstração. Para mostrar a veracidade da equivalência entre 3.1.21 e 3.1.23, vamos desenvolver 3.1.23.

Ao fazer todas as multiplicações presentes nessa segunda equação, teremos uma parcela da forma:

$$\underbrace{f(0) f^2(0) \dots f^2(0)}_{n \text{ factores}},$$

que se transformará em $f^{(2n+1)}(0)$ que encontramos em 3.1.21.

A parcela seguinte da primeira equação tem o factor $f^{2n-1}(0)$, que se obtém fazendo

$$\underbrace{f(0) f^2(0) \dots f^2(0)}_{n-1 \text{ factores}}.$$

Se consideramos apenas os $n-1$ primeiros $f^2(0)$, isso significa que no último factor $[f^2(0) + (2n-1)^2]$, em vez de multiplicarmos por $f^2(0)$, multiplicamos por $(2n-1)^2$ e o resultado final é:

$$(2n-1)^2 f^{(2n-1)}(0).$$

Não é esta a única parcela onde temos $f^{2n-1}(0)$, de facto se a escolha explicada acima fosse feita em qualquer um dos outros factores, teríamos igualmente parcelas com $f^{2n-1}(0)$. Essas parcelas são então:

$$1^2 f^{(2n-1)}(0)$$

$$3^2 f^{(2n-1)}(0)$$

$$5^2 f^{(2n-1)}(0)$$

...

$$(2n-1)^2 f^{(2n-1)}(0).$$

A soma de todas elas resulta em

$$(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2) f^{(2n-1)}(0) = s_{2n-1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0)$$

Continuando agora para

$$\underbrace{f(0) f^2(0) \dots f^2(0)}_{n-2 \text{ factores}}.$$

Todos os $f^{2n-3}(0)$ estariam multiplicados pelo produto entre quaisquer dois elementos do conjunto $\{1^2, 3^2, 5^2, \dots, (2n-1)^2\}$, e a soma dessas parcelas teria como resultado

$$s_{2n-1}^{(2)} f^{(2n-3)}(0).$$

O processo é idêntico para todas as parcelas que aparecem no numerador de 3.1.21.

Mostrou-se assim, que são equivalentes as duas formas de cálculo de A_{2n+1} , propostas por Gomes Teixeira. \square

Para encontrar K, A, B, \dots, L , Gomes Teixeira usou o mesmo processo, desta feita usando a função $\cos kx$ – porque queremos as potências pares de \sin – e considerando, para uma maior facilidade de cálculos, que k é par.

Como antes, usamos o desenvolvimento 3.1.17, e procuramos as parcelas que não são imaginários – porque desenvolvemos $\cos kx$. Ficamos com:

$$\cos kx = \cos^k x + \binom{k}{2} \cos^{k-2} x (i \sin x)^2 + \dots + \binom{k}{2n} \cos^{k-2n} x (i \sin^{2n} x) + \dots$$

Gomes Teixeira, para este caso, apresenta-nos o seguinte:

$$\begin{aligned} \cos kx = 1 - \frac{k^2}{2} \sin^2 x + \frac{k^2(k^2 - 2^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x - \dots + \\ + (-1)^n \frac{k^2(k^2 - 2^2) \dots (k^2 - (2n-2)^2)}{2 \cdot 3 \dots 2n} \sin^{2n} x \pm \dots \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

TEIXEIRA 1896, p.111

Para obtermos o desenvolvimento 3.1.24 a partir do apresentado imediatamente antes, devemos seguir o mesmo raciocínio que nos conduziu ao desenvolvimento do $\sin kx$ em 3.1.15.

Demonstração. Começemos então com

$$\begin{aligned} \cos kx &= \cos^k x - \binom{k}{2} \cos^{k-2} x (\sin x)^2 + \dots + \\ &+ (-1)^n \binom{k}{2n} \cos^{k-2n} x (\sin^{2n} x) + \dots \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Como agora temos k par, podemos fazer $k = 2m$, onde $m \in \mathbb{N}$, e fazer a transformação de todas as potências de base $\cos x$ em potências de base $\sin x$, usando a igualdade $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

$$\begin{aligned} \cos kx &= (1 - \sin^2 x)^m - \binom{k}{2} (1 - \sin^2 x)^{m-1} (\sin x)^2 + \dots + \\ &+ (-1)^n \binom{k}{2n} (1 - \sin^2 x)^{m-n} (\sin^{2n} x) + \dots \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Logo da primeira parcela de 3.1.25 sai

$$\cos^{2m} x = (1 - \sin^2 x)^m = 1 - m \sin^2 x + \frac{m(m-1)}{2} \sin^4 x - \dots + (-1)^m \sin^{2m} x.$$

Encontramos já a primeira parcela de 3.1.24, o 1.

Para a segunda parcela do mesmo desenvolvimento – a que apresenta o factor $\sin^2 x$ – temos

$$-\frac{k}{2} \sin^2 x \text{ que sai de } (1 - \sin^2 x)^{\frac{k}{2}}$$

e

$$-\frac{k(k-1)}{2!} \sin^2 x \text{ resultado de } -\binom{k}{2} (1 - \sin^2 x)^{\frac{k}{2}-1} (\sin x)^2.$$

Todas as outras parcelas apresentam potências de \sin superiores a 2 e não são, por isso, incluídas neste cálculo.

Assim sendo, e não esquecendo o facto de $m = \frac{k}{2}$, fazemos:

$$\begin{aligned} -\frac{k}{2} \sin^2 x + \left(-\frac{k(k-1)}{2!} \sin^2 x \right) &= \left(-\frac{k}{2} - \frac{k(k-1)}{2!} \right) \sin^2 x = \\ &= -\frac{k^2}{2} \sin^2 x \end{aligned}$$

De seguida, para $\sin^4 x$, será:

$$\left(\frac{\frac{k}{2}(\frac{k}{2}-1)}{2!} + \frac{k(k-1)}{2!} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} \right) \sin^4 x = \frac{k^2(k^2-2^2)}{4!} \sin^4 x$$

Em geral, para $\sin^{2n} x$, temos:

$$(-1)^n \left(\frac{\frac{k}{2} \cdots (\frac{k}{2} - (n-1))}{n!} + \frac{k(k-1)}{2!} \frac{(\frac{k}{2} - 1) \cdots (\frac{k}{2} - (n-1))}{(n-1)!} + \dots + \frac{k(k-1) \cdots (k - (2n-3))}{(2n-2)!} \frac{m - (n-1)}{1!} + \frac{k(k-1) \cdots (k - (2n-1))}{(2n)!} \right) \sin^{2n} x$$

que se iguala a

$$(-1)^n \frac{k^2(k^2 - 2^2) \cdots (k^2 - (2n-2)^2)}{2 \cdot 3 \cdots 2n} \sin^{2n} x$$

□

De seguida

(...) en comparant la valeur du coefficient de $\sin^{2n} x$ dans cette formule avec la valeur donnée par la formule

$$A_{2n} = (-1)^n K [k^{2n} - Ak^{2(n-1)} + \dots \pm Lk^2]$$

et en représentant par $S_{2n}^{(m)}$ la somme des combinaisons des nombres

$$2^2, 4^2, 6^2, \dots, (2n-2)^2$$

pris m à m , on a

$$K = \frac{1}{(2n)!}, \quad A = S_{2n}^{(1)}, \quad B = S_{2n}^{(2)}, \dots, \quad L = S_{2n}^{(n-1)}$$

Nous pouvons donc écrire la formule générale suivante:

$$A_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \dots + S_{2n}^{n-1} f^{(2)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n} \quad (3.1.27)$$

TEIXEIRA 1896, p.111

Tal como antes, Gomes Teixeira apresenta uma notação especial para as somas das combinações, mas desta vez, para números pares. Examinemos um exemplo – A_6 – com $n = 3$.

$$\begin{aligned}
A_6 &= A_{2 \times 3} \\
&= (-1)^3 \frac{k^2 (k^2 - 2^2) (k^2 - 4^2)}{2 \cdot 3 \dots 6} \\
&= (-1)^3 \frac{1}{6!} (k^6 - (4^2 + 2^2) k^4 + (4^2 \cdot 2^2) k^2)
\end{aligned}$$

E claramente:

- $4^2 + 2^2$ é a soma da combinação dos números 2^2 e 4^2 tomados 1 a 1;
- $4^2 \cdot 2^2$ é o resultado da única combinação dos números 2^2 e 4^2 de 2 em 2.

Para este caso particular temos:

$$\begin{aligned}
K' &= \frac{1}{(2 \times 3)!} = \frac{1}{6!} & A' &= S_{2 \times 3}^{(1)} = S_6^{(1)}, \\
B' &= S_{2 \times 3}^{(2)} = S_6^{(2)}.
\end{aligned}$$

A forma simbólica de 3.1.27 é também dada por Gomes Teixeira:

$$A_{2n} = \frac{f^2(0) [f^2(0) + 2^2] [f^2(0) + 4^2] \dots [f^2(0) (2n - 2)^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}. \quad (3.1.28)$$

TEIXEIRA 1896, p.111

Que se deduz de uma forma análoga à apresentada para as potências ímpares. Desta vez, para a parcela com a maior potência de $f(0)$ – aquela em que, na multiplicação, apenas foram escolhidos os $f^2(0)$ – temos:

$$f^2(0) \underbrace{f^2(0) \dots f^2(0)}_{n-1 \text{ factores}} = f^{2n}(0).$$

Segue-se a parcela com a potência $f^{2n-2}(0)$. Podemos verificar que, depois de fazermos as multiplicações possíveis, temos um conjunto de parcelas em que se encontra o factor $f^{2n-2}(0)$ – parcelas em que em uma das multiplicações iniciais, não foi escolhido $f^2(0)$, mas sim um número do conjunto $\{2^2, 4^2, \dots, (2n - 2)^2\}$. Temos então:

$$2^2 f^{2n-2}(0) + 4^2 f^{2n-2}(0) + \dots + (2n-2) f^{2n-2}(0) = (2^2 + 4^2 + \dots + (2n-2)) f^{2n-2}(0). \quad (3.1.29)$$

Sabemos que $(2^2 + 4^2 + \dots + (2n-2)) = S_{2n-1}^{(1)}$ e portanto chegámos à segunda parcela de 3.1.27: $S_{2n-1}^{(1)} f^{(2n-2)}(0)$

Continuamos com a mesma técnica até a multiplicação não incluir qualquer $f^2(0)$, ou seja, onde temos $2^2 \cdot 4^2 \dots (2n-2)^2 = S_{2n}^{(n-1)}$. E assim obtemos 3.1.27 a partir de 3.1.28.

Por tudo o que se demonstrou anteriormente, Gomes Teixeira chega ao teorema seguinte:

Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par l'ovale dont l'équation est $|\sin z| = c$ (où $c \leq 1$) et dont le centre est l'origine des coordonnées, on a, pour tous les points x de l'intérieur de cete aire,

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) = f(0) + & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \dots + S_{2n}^{n-1} f^{(2)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \sin^{2n} x \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0) + S_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \dots + S_{2n+1}^{(n)} f'(0)}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} \sin^{2n+1} x, \end{aligned} \right. \quad (3.1.30)$$

ou symboliquement

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) = f(0) + & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^2(0) [f^2(0) + 2^2] [f^2(0) + 4^2] \dots [f^2(0) (2n-2)^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \sin^{2n} x \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(0) [f^2(0) + 1^2] [f^2(0) + 3^2] \dots [f^2(0) + (2n-1)^2]}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} \sin^{2n+1} x, \end{aligned} \right. \quad (3.1.31)$$

où l'on doit remplacer, après les multiplications, les puissances de $f(0)$ par des dérivées d'ordre égal à l'exposant de la puissance.

TEIXEIRA 1896, p.112

Os pontos 4., 5., 6. que se seguem na obra de Gomes Teixeira, referem-se à aplicação de toda a teoria que se antecedeu. Neste trabalho, vamos analisar o primeiro ponto (4.).

A função que Gomes Teixeira se propõe desenvolver em série é:

$$f(x) = x^k$$

onde k representa um número inteiro positivo.

Gomes Teixeira divide este estudo em dois casos:

- k par;
- k ímpar.

Vamos seguir a ordem proposta por Gomes Teixeira e começar pelas potências pares.

Supposons premièrement que k est un nombre pair égal à $2m$. On a

$$f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \dots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0) = 0$$

quando est $n < m, (\dots)$

TEIXEIRA 1896, p.112

O resultado anterior é óbvio pois, como a função toma a forma

$$f(x) = x^{2m},$$

qualquer derivada de ordem inferior a $2m$, se anula para $x = 0$.

Como consequência disso, se tivermos em atenção a fórmula de cálculo dos A_{2n} apresentada em 3.1.27, temos:

$$A_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \dots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0)}{1 \cdot 2 \dots 2n} = 0$$

$$A_0 = 0, A_2 = 0, A_4 = 0, \dots, A_{2n-2} = 0.$$

TEIXEIRA 1896, p.112

Chegamos então à derivada de ordem $2m$ de $f(x)$. Esta será a única derivada não nula no ponto $x = 0$, pois

$$f^{2m}(x) = 2m(2m-1)(2m-2) \dots 2 \cdot 1x^0 = (2m)!,$$

daí em diante, como derivamos uma constante, teremos sempre 0 como resultado dessa derivada, seja a ordem da derivada par ou ímpar.

Concluimos daqui que, no cálculo dos coeficientes, o numerador reduz-se à parcela onde encontramos $f^{2m}(0)$:

On suite

$$\begin{aligned} A_{2m} &= \frac{f^{2m}(0)}{(2m)!} = 1, \\ A_{2m+2} &= \frac{S_{2m+2}^{(1)} f^{2m}(0)}{(2m+2)!} = \frac{S_{2m+2}^{(1)}}{(2m+1)(2m+2)}, \\ A_{2m+4} &= \frac{S_{2m+4}^{(2)} f^{2m}(0)}{(2m+4)!} = \frac{S_{2m+4}^{(2)}}{(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

TEIXEIRA 1896, p.112

Os coeficientes de ordem ímpar – A_1, A_3, A_5, \dots – são todos nulos, devido a $f^{2m}(0)$ nunca entrar no cálculo desses coeficientes, tal como podemos ver em 3.1.21.

Nous avons donc la formule

$$\begin{aligned} x^{2m} = \sin^{2m} x &\left[1 + \frac{S_{2m+2}^{(1)}}{(2m+1)(2m+2)} \sin^2 x + \right. \\ &\left. + \frac{S_{2m+4}^{(2)}}{(2m+1) \dots (2m+4)} \sin^4 x + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

TEIXEIRA 1896, p.113

Para um k ímpar, digamos $k = 2m + 1$, apenas a derivada de ordem $2m + 1$ é diferente de 0 para $x = 0$:

$$f^{2m+1}(x) = (2m+1)!x^0 = (2m+1)!$$

Podemos adaptar todo o estudo feito no caso anterior para este.

Os coeficientes calculam-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
A_{2m+1} &= \frac{f^{2m+1}(0)}{(2m+1)!} = 1, \\
A_{2m+3} &= \frac{s_{2m+3}^{(1)} f^{2m}(0)}{(2m+3)!} = \frac{s_{2m+3}^{(1)}}{(2m+2)(2m+3)}, \\
A_{2m+5} &= \frac{s_{2m+5}^{(2)} f^{2m}(0)}{(2m+5)!} = \frac{s_{2m+5}^{(2)}}{(2m+2) \dots (2m+5)}, \\
&\dots
\end{aligned}$$

E sendo assim:

$$\begin{aligned}
x^{2m+1} &= \sin^{2m+1} x \left[1 + \frac{s_{2m+3}^{(1)}}{(2m+2)(2m+3)} \sin^2 x + \right. \\
&\quad \left. + \frac{s_{2m+5}^{(2)}}{(2m+2) \dots (2m+5)} \sin^4 x + \dots \right] \quad (3.1.33)
\end{aligned}$$

TEIXEIRA 1896, p.113

Seguem-se o estudo de dois casos particulares de k , $k = 2$ e $k = 1$.

É claro que se $k = 2$, então estamos no caso de potências pares, com $m = 1$ na equação 3.1.32. Fazendo a substituição correspondente, e tendo em conta que S_b^a é a combinação dos quadrados dos números pares até $b - 2$ de a em a , temos:

$$\begin{aligned}
x^2 &= \sin^2 x \left(1 + \frac{S_4^1}{3 \cdot 4} \sin^2 x + \frac{S_6^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \sin^4 x + \dots \right) \\
x^2 &= \sin^2 x \left(1 + \frac{2^2}{3 \cdot 4} \sin^2 x + \frac{2^2 \cdot 4^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \sin^4 x + \dots \right) \\
x^2 &= \sin^2 x \left(1 + \frac{2}{3} \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{1}{3} \sin^4 x + \dots \right) \\
x^2 &= \sin^2 x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sin^4 x + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{3} \sin^6 x + \dots
\end{aligned}$$

Para o caso de $k = 1$, a potência é ímpar com $m = 0$. Nesse caso a substituição é feita em 3.1.33 e usamos o facto de s_b^a ser a combinação dos números ímpares até $b - 2$ de a em a , ou seja:

(...) en remarquant qu'est

$$s_3^{(1)} = 1, s_5^{(2)} = 3^2, s_7^{(3)} = 3^2 \cdot 5^2, s_9^{(4)} = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2, \dots$$

TEIXEIRA 1896, p.113

$$\begin{aligned} x &= \sin x \left[1 + \frac{1}{2 \cdot 3} \sin^2 x + \frac{3^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^4 x + \frac{3^2 \cdot 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \sin^6 x + \dots \right] \\ x &= \sin x \left[1 + \frac{1}{2 \cdot 3} \sin^2 x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \sin^4 x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \sin^6 x + \dots \right] \\ x &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \sin^7 x + \dots \end{aligned}$$

Os últimos dois pontos desta secção do texto de Gomes Teixeira voltam a desenvolver o tema proposto.

Diz-nos Teixeira:

Nous avons considéré jusqu'ici seulement des ovales représentés par l'équation $|\sin z| = c$ dont le centre coïncide avec l'origine des coordonnées.

TEIXEIRA 1896, p.114

O passo seguinte é fazer os desenvolvimentos para as ovas que não têm o centro na origem $(0, 0)$. Vamos então considerar outros centros e ver como fazer o desenvolvimento em série nestes casos. Como se pode ler na página 26, os centros das elipses em causa são da forma $(\pm m\pi, 0)$. Devido à simetria existente, consideram-se apenas os centros $(+m\pi, 0)$.

Na realidade, o desenvolvimento utilizado é o mesmo a que se chegou em 3.1.30, mas deslocado em $m\pi$, segundo o eixo dos xx . Temos por isso:

$$\left\{ \begin{aligned} f(x + m\pi) &= f(0 + m\pi) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0 + m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0 + m\pi) + \dots + S_{2n}^{n-1} f^{(2)}(0 + m\pi)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \sin^{2n}(x + m\pi) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0 + m\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0 + m\pi) + \dots + s_{2n+1}^{(n)} f'(0 + m\pi)}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} \sin^{2n+1}(x + m\pi). \end{aligned} \right. \quad (3.1.34)$$

Que Gomes Teixeira simplifica de forma inteligente, igualando x a $x - m\pi$, obtendo de novo um desenvolvimento de $f(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(m\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(m\pi) + \dots + S_{2n}^{n-1} f^{(2)}(m\pi)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \sin^{2n} x \\ \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(m\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(m\pi) + \dots + s_{2n+1}^{(n)} f'(m\pi)}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} \sin^{2n+1} x. \end{array} \right. \quad (3.1.35)$$

On peut écrire cette formule symboliquement de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(m\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^2(m\pi) [f^2(m\pi) + 2^2] \dots [f^2(m\pi) + (2n-2)^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \sin^{2n} x \\ \quad + (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(m\pi) [f^2(m\pi) + 1^2] \dots [f^2(m\pi) + (2n-1)^2]}{1 \cdot 2 \cdot (2n+1)} \sin^{2n+1} x. \end{array} \right. \quad (3.1.36)$$

TEIXEIRA 1896, p.115

Por fim, usando as fórmulas de cálculo de A_n (3.1.3 e 3.1.4), Gomes Teixeira procura os resíduos nos pólos $m\pi$.

Da teoria anterior sai que:

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{n+1} z}.$$

E portanto:

$$A_{2n} = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{2n+1} z},$$

e

$$A_{2n+1} = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{2n+2} z},$$

o que significa que, tendo em conta a definição presente no apêndice A.2.2, A_{2n} é resíduo da função $\frac{f(z) \cos z}{\sin^{2n+1} z}$ e A_{2n+1} de $\frac{f(z) \cos z}{\sin^{2n+2} z}$.

Substituindo, nas fórmulas acima, A_{2n} e A_{2n+1} pelos equivalentes presentes em 3.1.27 e 3.1.21, respectivamente e mudando o ponto de aplicação para o pólo $m\pi$, chegamos a:

$$\frac{f^{(2n)}(m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(m\pi) + \dots + S_{2n}^{n-1} f^{(2)}(m\pi)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{n+1} z}$$

e

$$\frac{f^{(2n+1)}(m\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(m\pi) + \dots + s_{2n+1}^{(n)} f'(m\pi)}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{2n+2} z}$$

E assim sendo:

1°. Le résidu de la fonction $\frac{f(z) \cos z}{\sin^{2n+1} z}$ par rapport au pôle $m\pi$ est donné par la formule

$$R_m = \frac{f^{(2n)}(m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(m\pi) + \dots + S_{2n}^{n-1} f^{(2)}(m\pi)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n};$$

2°. Le résidu de la fonction $\frac{f(z) \cos z}{\sin^{2n+2} z}$ par rapport au même pôle est donné par la formule

$$R'_m = \frac{f^{(2n+1)}(m\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(m\pi) + \dots + s_{2n+1}^{(n)} f'(m\pi)}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)};$$

TEIXEIRA 1896, p.115

Se usarmos a segunda forma para calcular A_n

$$A_n = \frac{1}{2ni\pi} \int_s \frac{f'(z) dz}{\sin^n z}$$

temos:

$$A_{2n} = \frac{1}{2(2n)i\pi} \int_s \frac{f'(z) dz}{\sin^{2n} z}$$

e

$$A_{2n+1} = \frac{1}{2(2n+1)i\pi} \int_s \frac{f'(z) dz}{\sin^{2n+1} z}.$$

Sendo assim, fazendo a igualdade tal como antes para A_{2n} , ficamos com:

$$\frac{f^{(2n)}(m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(m\pi) + \dots + S_{2n}^{n-1} f^{(2)}(m\pi)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} = \frac{1}{2(2n)i\pi} \int_s \frac{f'(z) dz}{\sin^{2n} z}$$

mudando o factor $2n$ do denominador do segundo membro para o numerador do primeiro, obtemos:

$$\frac{2n \left(f^{(2n)}(m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(m\pi) + \dots + S_{2n}^{n-1} f^{(2)}(m\pi) \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f'(z)dz}{\sin^{2n} z} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f^{(2n)}(m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(m\pi) + \dots + S_{2n}^{n-1} f^{(2)}(m\pi)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1)} = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f'(z)dz}{\sin^{2n} z}$$

Já para A_{2n+1} temos:

$$\frac{f^{(2n+1)}(m\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(m\pi) + \dots + s_{2n+1}^{(n)} f'(m\pi)}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)i\pi} \int_s \frac{f'(z)dz}{\sin^{2n+1} z}$$

Mudamos o factor $2n+1$ do denominador do segundo membro para o numerador do primeiro:

$$\frac{(2n+1) \left(f^{(2n+1)}(m\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(m\pi) + \dots + s_{2n+1}^{(n)} f'(m\pi) \right)}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f'(z)dz}{\sin^{2n+1} z} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f^{(2n+1)}(m\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(m\pi) + \dots + s_{2n+1}^{(n)} f'(m\pi)}{1 \cdot 2 \dots 2n} = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f'(z)dz}{\sin^{2n+1} z}.$$

E portanto:

3°. Le résidu de la fonction $\frac{f'(z)}{\sin^{2n} z}$ par rapport à $m\pi$ est donné par la formule

$$R_m'' = \frac{f^{(2n)}(m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(m\pi) + \dots + S_{2n}^{n-1} f^{(2)}(m\pi)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1)};$$

4°. Le résidu de la fonction $\frac{f'(z)}{\sin^{2n+1} z}$ par rapport à $m\pi$ est

$$R_m''' = (-1)^m \frac{f^{(2n+1)}(m\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(m\pi) + \dots + s_{2n+1}^{(n)} f'(m\pi)}{1 \cdot 2 \dots 2n}.$$

TEIXEIRA 1896, p.116

Se em vez de $f'(z)$ tivéssemos, nas duas fórmulas anteriores, $f(z)$, então a ordem das derivadas iria baixar em 1 unidade. Temos então

$$R_m^{(IV)} = \frac{f^{(2n-1)}(m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-3)}(m\pi) + \dots + S_{2n}^{n-1} f'(m\pi)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1)};$$

e

$$R_m^{(V)} = (-1)^m \frac{f^{(2n)}(m\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-2)}(m\pi) + \dots + s_{2n+1}^{(n)} f(m\pi)}{1 \cdot 2 \dots 2n}.$$

3.1.2 Sur les développements de $f(x)$ suivant les puissances de $\sin x$ qui ont lieu dans une bande infinie

O caso em que $c > 1$ não é tão desenvolvido por Gomes Teixeira quanto o primeiro. Ainda assim, as páginas que lhe são dedicadas, evidenciam algumas diferenças entre as duas situações.

Começando pelo integral que Gomes Teixeira considera para iniciar o seu estudo:

Considérons maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z) \sin(z-x) dz}{\sin z - \sin x}$$

TEIXEIRA 1896, p.117

Sendo o pólo $z = x$ único no interior do contorno considerado, o valor do resíduo nesse ponto, pode-se calcular usando o exposto em A.2.2. Como o pólo é simples, fazemos

$$h(z) = \frac{f(z) \sin \frac{1}{2}(z+x)}{\sin \frac{1}{2}(z-x)}.$$

Temos por isso,

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= f(z) \sin \frac{1}{2}(z+x) \\ \psi(z) &= \sin \frac{1}{2}(z-x), \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\psi'(z) = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}(z-x).$$

Como $\psi'(x) = \frac{1}{2}$ verifica-se a condição de $\psi'(x) \neq 0$.

Fazendo $z = x$, ficamos com o resultado final de

$$\begin{aligned} \text{res}(h, x) &= \frac{f(x) \sin \frac{1}{2}(x+x)}{\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}(x-x)} \\ &= 2f(x) \sin 2x. \end{aligned}$$

Gomes Teixeira conclui

(...) *par conséquent nous avons*

$$2 \sin x f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z) \sin(z-x) dz}{\sin z - \sin x}$$

TEIXEIRA 1896, p.117

O passo seguinte consiste em dividir o contorno S em 4 partes distintas. Duas formadas pelos segmentos de recta e outras duas pelas curvas geradas por $|\sin z| = c$. Os integrais segundo os segmentos de recta são simétricos e não são considerados nos cálculos finais porque se anulam.

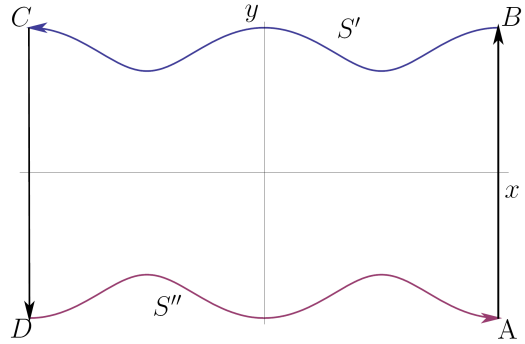


Fig. 3.13: Contorno S .

Aquando desta conclusão, no texto de Gomes Teixeira encontrámos um pequeno erro no que respeita à ordem de integração. É feita a integração em ordem a x em vez de integração em ordem a z .

$$\int_{AB} \frac{f(z) \sin(z+x) dx}{\sin z - \sin x} = \int_{DC} \frac{f(z) \sin(z+x) dz}{\sin z - \sin x}.$$

Fig. 3.14: Erro na ordem de integração.

Donc nous avons, en représentant par S' et S'' les courbes BC et DA :

$$2 \sin x f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{S'} \frac{f(z) \sin(z+x) dz}{\sin z - \sin x} + \frac{1}{2i\pi} \int_{S''} \frac{f(z) \sin(z+x) dz}{\sin z - \sin x}$$

TEIXEIRA 1896, p.118

Se tivermos em atenção os gráficos 3.1 e 3.2(b), vemos que para todos os x no interior da banda considerada, temos

$$|\sin x| < |\sin z|$$

Ficamos com

(...) on peut écrire le développement

$$\begin{aligned} \sin x f(x) &= \sin x [A_0 + A_1 \sin x + \dots + A_n \sin^n x + \dots] + \\ &+ \cos x [B_0 + B_1 \sin x + \dots + B_n \sin^n x + \dots], \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

où

$$A_n = \frac{1}{4i\pi} \left[\int_{S'} \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{n+1} z} + \int_{S''} \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{n+1} z} \right], \quad (3.1.38)$$

$$B_n = \frac{1}{4i\pi} \left[\int_{S'} \frac{f(z) dz}{\sin^n z} + \int_{S''} \frac{f(z) dz}{\sin^n z} \right]. \quad (3.1.39)$$

TEIXEIRA 1896, p.118

Demonstração. Partimos da soma de integrais apresentado acima, e chegamos a

$$\sin x f(x) = \underbrace{\frac{1}{4i\pi} \int_{S'} \frac{f(z) \sin(z+x) dz}{\sin z - \sin x}}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{4i\pi} \int_{S''} \frac{f(z) \sin(z+x) dz}{\sin z - \sin x}}_{(2)},$$

Tomemos primeiro (1).

$$\begin{aligned} \frac{1}{4i\pi} \int_{S'} \frac{f(z) \sin(z+x) dz}{\sin z - \sin x} &= \frac{1}{4i\pi} \int_{S'} f(z) (\sin z \cos x + \cos z \sin x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{\sin^{n+1} z} dz \Leftrightarrow \\ &= \frac{1}{4i\pi} \int_{S'} f(z) \cos x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{\sin^n z} dz + \\ &+ \frac{1}{4i\pi} \int_{S'} f(z) \cos z \sin x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{\sin^{n+1} z} dz \\ &= \frac{1}{4i\pi} \cos x \int_{S'} f(z) + \frac{f(z) \sin x}{\sin z} + \frac{f(z) \sin^2 x}{\sin^2 z} + \dots dz + \\ &+ \frac{1}{4i\pi} \sin x \int_{S'} \frac{f(z) \cos z}{\sin z} + \frac{f(z) \cos z \sin x}{\sin^2 z} + \dots dz \end{aligned}$$

Fazemos o mesmo com (2), e concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4i\pi} \int_{S''} \frac{f(z) \sin(z+x) dz}{\sin z - \sin x} &= \frac{1}{4i\pi} \cos x \int_{S''} f(z) + \frac{f(z) \sin x}{\sin z} + \frac{f(z) \sin^2 x}{\sin^2 z} + \dots dz + \\ &+ \frac{1}{4i\pi} \sin x \int_{S''} \frac{f(z) \cos z}{\sin z} + \frac{f(z) \cos z \sin x}{\sin^2 z} + \dots dz \end{aligned}$$

Juntamos os dois resultados,

$$\begin{aligned} \sin x f(x) &= \sin x \left[\frac{1}{4i\pi} \int_{S'} \frac{f(z) \cos z}{\sin z} + \frac{f(z) \cos z}{\sin^2 z} \sin x + \dots dz + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4i\pi} \int_{S''} \frac{f(z) \cos z}{\sin z} + \frac{f(z) \cos z}{\sin^2 z} \sin x + \dots dz \right] + \\ &\cos x \left[\frac{1}{4i\pi} \int_{S'} f(z) + \frac{f(z)}{\sin z} \sin x + \frac{f(z)}{\sin^2 z} \sin^2 x + \dots dz + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4i\pi} \int_{S''} f(z) + \frac{f(z)}{\sin z} \sin x + \frac{f(z)}{\sin^2 z} \sin^2 x + \dots dz \right] \\ &= \sin x \left[\frac{1}{4i\pi} \left(\int_{S'} \frac{f(z) \cos z}{\sin z} dz + \int_{S''} \frac{f(z) \cos z}{\sin z} dz \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4i\pi} \left(\int_{S'} \frac{f(z) \cos z}{\sin^2 z} dz + \int_{S''} \frac{f(z) \cos z}{\sin^2 z} dz \right) \sin x + \dots \right] + \\ &\quad + \cos x \left[\frac{1}{4i\pi} \left(\int_{S'} f(z) dz + \int_{S''} f(z) dz \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4i\pi} \left(\int_{S'} \frac{f(z)}{\sin z} dz + \int_{S''} \frac{f(z)}{\sin z} dz \right) \sin x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4i\pi} \left(\int_{S'} \frac{f(z)}{\sin^2 z} dz + \int_{S''} \frac{f(z)}{\sin^2 z} dz \right) \sin^2 x + \dots \right] \end{aligned}$$

Chegamos assim ao A_n e B_n definidos como em 3.1.38 e 3.1.39 respectivamente, e ficamos com a expressão final,

$$\begin{aligned} \sin x f(x) &= \sin x [A_0 + A_1 \sin x + \dots + A_n \sin^n x + \dots] + \\ &\quad + \cos x [B_0 + B_1 \sin x + \dots + B_n \sin^n x + \dots], \end{aligned}$$

tal como previsto. □

Como os desenvolvimentos em série que Gomes Teixeira se propôs obter, estão centrados nos pontos $x = 0, x = \pm\pi, x = \pm 2\pi, \dots$, se substituirmos em desenvolvimento 3.1.37 o x por qualquer um destes valores, sai imediatamente que $B_0 = 0$. Num passo

seguinte, podemos também, isolar $f(x)$. Teixeira chega, assim, ao desenvolvimento da função propriamente dita:

(...) nous pouvons donc encore écrire

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin x + \dots + A_n \sin^n x + \dots + \\ + \cos x [B_1 + B_2 \sin x \dots + B_n \sin^{n-1} x + \dots],$$

TEIXEIRA 1896, p.118

Como os integrais pelos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são simétricos, temos:

$$A_n = \frac{1}{4i\pi} \int_S \frac{f(z) \cos z}{\sin^{n+1} z} dz \quad (3.1.40)$$

$$B_n = \frac{1}{4i\pi} \int_S \frac{f(z)}{\sin^n z} dz \quad (3.1.41)$$

Demonstração. Consideremos primeiro A_n e façamos $g_1(z) = \frac{f(z) \cos z}{\sin^{n+1} z}$. Então,

$$A_n = \frac{1}{4i\pi} \left[\int_{S'} g_1(z) dz + \int_{S''} g_1(z) dz \right] \\ = \frac{1}{4i\pi} \left[\int_{S'} g_1(z) dz + \int_{S''} g_1(z) dz + \underbrace{\int_{\overline{AB}} g_1(z) dz + \int_{\overline{CD}} g_1(z) dz}_{=0} \right]$$

Como $S = \overline{AB} \cup S' \cup \overline{CD} \cup S''$, concluímos que

$$A_n = \frac{1}{4i\pi} \int_S g_1(z) dz \\ = \frac{1}{4i\pi} \int_S \frac{f(z) \cos z}{\sin^{n+1} z} dz.$$

Para B_n procedemos da mesma forma para obter 3.1.41.

□

Au moyen de l'intégration par parties on voit qu'on peut encore écrire

$$A_n = \frac{1}{4ni\pi} \int_S \frac{f'(z)dz}{\sin^n z} \quad (3.1.42)$$

TEIXEIRA 1896, p.119

A forma de chegarmos a 3.1.42, é em tudo semelhante àquela que encontramos na página 13.

Gomes Teixeira enuncia então, o seguinte teorema:

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans la bande infinie comprise entre les deux branches de la courbe $|\sin z| = c$ (où $c > 1$) et admet la période 2π , on peut développer $f(x)$ en série de la forme suivant:

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin x + \dots + A_n \sin^n x + \dots + \cos x [B_1 + B_2 \sin x + \dots + B_n \sin^{n-1} x + \dots], \quad (3.1.43)$$

les coefficients A_n et B_n étant donnés par les formules 3.1.40, 3.1.41.

TEIXEIRA 1896, p.119

No ponto seguinte, Gomes Teixeira usa o teorema de Cauchy para calcular o valor dos integrais presentes nas expressões dos coeficientes A_n e B_n .

Como estamos a trabalhar no intervalo de $-\pi + \eta < x < \pi + \eta$, onde $\eta < \frac{\pi}{2}$, é claro que as funções integrandas dessas expressões têm pólos em 0 e π .

Gomes Teixeira recupera aqui as fórmulas de cálculo de R_m , R'_m , $R_m^{(IV)}$, $R_m^{(V)}$, que encontrou no final da análise ao caso em que $c \leq 1$ (página 46 e seguintes). Para o pólo $x = 0$ temos $m = 0$, e para $x = \pi$ o $m = 1$.

Temos então que:

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{2n+1}} \right] = \frac{1}{2} [R_0 + R_1], \\ A_{2n+1} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{2n+2}} \right] = \frac{1}{2} [R'_0 + R'_1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{2n} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z)dz}{\sin^{2n}} \right] = \frac{1}{2} \left[R_0^{(IV)} + R_1^{(IV)} \right], \\
B_{2n+1} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z)dz}{\sin^{2n+1}} \right] = \frac{1}{2} \left[R_0^{(V)} + R_1^{(V)} \right].
\end{aligned}$$

Fazendo uso da substituição dos R_m , R'_m , $R_m^{(IV)}$, $R_m^{(V)}$, de acordo com o exposto nas páginas referidas, Gomes Teixeira propõe o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= \frac{1}{2} \frac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \dots + S_{2n}^{n-1} f^{(2)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{f^{(2n)}(\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(\pi) + \dots + S_{2n}^{n-1} f^{(2)}(\pi)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n},
\end{aligned}$$

ou, en posant

$$f(x) + f(x + \pi) = F_1(x) :$$

$$A_{2n} = \frac{1}{2} \frac{F_1^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} F_1^{(2n-2)}(0) + \dots + S_{2n}^{(n-1)} F_1^{(2)}(0)}{1 \cdot 2 \dots 2n}. \quad (3.1.44)$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
A_{2n+1} &= \frac{1}{2} \frac{f^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \dots + s_{2n+1}^{(n)} f'(0)}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} \\
&- \frac{1}{2} \frac{f^{(2n+1)}(\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(\pi) + \dots + s_{2n+1}^{(n)} f'(\pi)}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)},
\end{aligned}$$

ou, en posant

$$f(x) - f(x + \pi) = F(x) :$$

$$A_{2n+1} = \frac{1}{2} \frac{F^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} F^{(2n-1)}(0) + \dots + s_{2n+1}^{(n)} F'(0)}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)}. \quad (3.1.45)$$

De la même manière on trouve les formules

$$B_{2n} = \frac{1}{2} \frac{F_1^{(2n-1)}(0) + S_{2n}^{(1)} F_1^{(2n-3)}(0) + \dots + S_{2n}^{(n-1)} F_1'(0)}{1 \cdot 2 \dots (2n-1)}, \quad (3.1.46)$$

$$B_{2n+1} = \frac{1}{2} \frac{F^{(2n)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} F^{(2n-2)}(0) + \dots + s_{2n+1}^{(n)} F(0)}{1 \cdot 2 \dots (2n)}. \quad (3.1.47)$$

TEIXEIRA 1896, p.119

Por um processo análogo ao registado nas páginas 34 e 39, podemos escrever simbolicamente as expressões dos coeficientes:

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \frac{1}{2} \frac{F_1^2(0) [F_1^2(0) + 2^2] [F_1^2(0) + 4^2] \dots [F_1^2(0) + (2n-2)^2]}{1 \cdot 2 \dots 2n}, \\ A_{2n+1} &= \frac{1}{2} \frac{F(0) [F^2(0) + 1^2] [F^2(0) + 3^2] \dots [F^2(0) + (2n-1)^2]}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)}, \\ B_{2n} &= \frac{1}{2} \frac{F_1(0) [F_1^2(0) + 2^2] [F_1^2(0) + 4^2] \dots [F_1^2(0) + (2n-2)^2]}{1 \cdot 2 \dots (2n-1)}, \\ B_{2n+1} &= \frac{1}{2} \frac{F^0(0) [F^2(0) + 1^2] [F^2(0) + 3^2] \dots [F^2(0) + (2n-1)^2]}{1 \cdot 2 \dots 2n}. \end{aligned}$$

Contudo, se colocarmos $n = 0$, temos uma divisão por 0 nas fórmulas anteriores. E assim sendo, estas não servem para o cálculo de A_0 e B_1 . É por isso que recorremos ao sistema que se obtém pondo $x = 0$ e $x = \pi$:

$$\begin{cases} f(0) = A_0 + B_1 \\ f(\pi) = A_0 - B_1 \end{cases} \quad (3.1.48)$$

resultando que

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} [f(0) + f(\pi)] = \frac{1}{2} F_1(0), \\ B_1 &= \frac{1}{2} [f(0) - f(\pi)] = \frac{1}{2} F(0). \end{aligned}$$

A generalização de toda a teoria anterior, faz-se nos pontos seguintes.

Gomes Teixeira considera agora que $f(x)$ pode admitir um qualquer período real ou original, 2ω . Nestes casos, podemos alterar a variável para que seja escrita segundo uma variável que tem período 2π . Se fizermos:

$$x = \frac{2\omega X}{2\pi} = \frac{\omega X}{\pi},$$

então, $f\left(\frac{\omega X}{\pi}\right)$ terá um período de 2π .

Assim sendo, se $f\left(\frac{\omega X}{\pi}\right)$ for holomorfa na área limitada pelos ramos da curva $|\sin X| = c$, onde $c > 1$, podemos aplicar o desenvolvimento,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\omega X}{\pi}\right) = & A_0 + A_1 \sin X + \dots + A_n \sin^n X + \dots + \\ & + \cos X [B_1 + B_2 \sin X \dots + B_n \sin^{n-1} X + \dots]. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) = & A_0 + A_1 \sin \frac{\pi X}{\omega} + \dots + A_n \sin^n \frac{\pi X}{\omega} + \dots + \\ & + \cos \frac{\pi X}{\omega} \left[B_1 + B_2 \sin \frac{\pi X}{\omega} \dots + B_n \sin^{n-1} \frac{\pi X}{\omega} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Os coeficientes A_n e B_n continuam a ser calculados da mesma forma, mas agora

$$F(x) = f\left(\frac{\omega x}{\pi}\right) - f\left(\frac{\omega(x + \pi)}{\pi}\right)$$

e

$$F_1(x) = f\left(\frac{\omega x}{\pi}\right) + f\left(\frac{\omega(x + \pi)}{\pi}\right)$$

O facto de termos

$$x = \frac{\omega X}{\pi},$$

vai fazer com que a área que estamos a trabalhar sofra uma expansão/contracção e rotação com centro na origem das coordenadas.

Se tomarmos como exemplo $\omega = 0 + 1i$, assistimos a uma rotação de 90° . A divisão por π , como é uma constante superior a 1, vai fazer com que haja uma expansão da área.

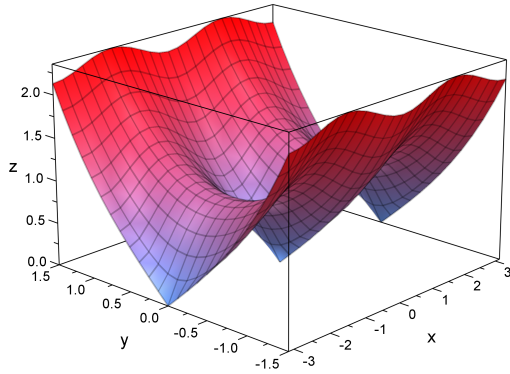


Fig. 3.15: Gráfico original.

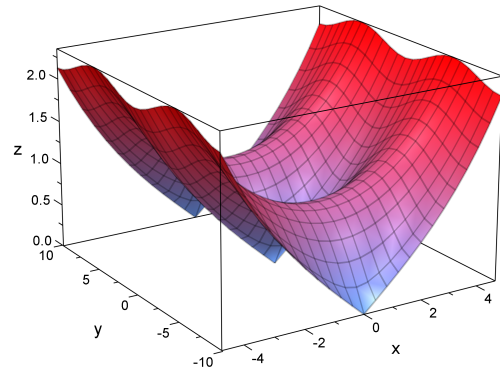


Fig. 3.16: Gráfico da transformada.

Note-se que os alcances dos eixos xx e yy , foram trocados e multiplicados por π para termos uma imagem semelhante à original.

Quanto a esta transformação, diz-nos Gomes Teixeira:

En posant en

$$\omega = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \quad X = R(\cos \theta' + i \sin \theta'), \quad x = r(\cos \tau + i \sin \tau)$$

on trouve

$$\tau = \theta + \theta', \quad \frac{\rho R}{\pi} = r$$

TEIXEIRA 1896, p.121

Demonstração. Da expressão

$$x = \frac{\omega X}{\pi},$$

vem que

$$r(\cos \tau + i \sin \tau) = \frac{\rho(\cos \theta + i \sin \theta)R(\cos \theta' + i \sin \theta')}{\pi},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
r(\cos \tau + i \sin \tau) &= \frac{\rho R}{\pi} ((\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i (\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')) \\
r(\cos \tau + i \sin \tau) &= \frac{\rho R}{\pi} (\cos (\theta + \theta') + i \sin (\theta + \theta')).
\end{aligned}$$

Daqui sai o que pretendemos

$$\tau = \theta + \theta', \quad \frac{\rho R}{\pi} = r.$$

□

E Teixeira continua explicando as transformações patentes nos gráficos 3.15 e 3.16 acima:

On voit donc l'aire qui, dans le plan de représentation de x , correspond à l'aire limitée par les deux branches de la courbe $|\sin X| = c$ est limitée par une courbe qu'on obtient en transformant premièrement la courbe $|\sin X| = c$ de manière qu'entre les rayons vecteurs R des point de cette courbe et les rayons vecteurs correspondants r de la transformée existe le rapport $r = \frac{\rho}{\pi} R$, et ensuite en faisant tourner l'aire limitée par la courbe ainsi obtenue autour de l'origine des coordonnées d'un angle égal à l'argument de la période 2ω .

TEIXEIRA 1896, p.121

O passo seguinte na generalização, é fazer a translação do ponto considerado. Nesse sentido, Gomes Teixeira aplica a teoria à função $f(X + \alpha)$ e tira, de imediato, o desenvolvimento

$$\begin{aligned}
f(X + a) &= A_0 + A_1 \sin \frac{\pi X}{\omega} + \dots + A_n \sin^n \frac{\pi X}{\omega} + \dots + \\
&\quad + \cos \frac{\pi X}{\omega} \left[B_1 + B_2 \sin \frac{\pi X}{\omega} \dots + B_n \sin^{n-1} \frac{\pi X}{\omega} + \dots \right],
\end{aligned}$$

que fazendo,

$$X + \alpha = x$$

transforma em

$$\begin{aligned}
f(x) &= A_0 + A_1 \sin \frac{\pi(x-\alpha)}{\omega} + \dots + A_n \sin^n \frac{\pi(x-\alpha)}{\omega} + \dots + \\
&+ \cos \frac{\pi(x-\alpha)}{\omega} \left[B_1 + B_2 \sin \frac{\pi(x-\alpha)}{\omega} + \dots + B_n \sin^{n-1} \frac{\pi(x-\alpha)}{\omega} + \dots \right],
\end{aligned}$$

E as funções $F(x)$ e $F_1(x)$ passam a ser

$$\begin{aligned}
F(x) &= f\left(\frac{\omega x}{\pi} + \alpha\right) - f\left(\frac{\omega(x+\pi)}{\pi} + \alpha\right) \\
F_1(x) &= f\left(\frac{\omega x}{\pi} + \alpha\right) + f\left(\frac{\omega(x+\pi)}{\pi} + \alpha\right)
\end{aligned}$$

O caso $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ apresenta a particularidade de transformar cos em sin e vice-versa, resultando em

$$\begin{aligned}
f(x) &= A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{\omega} + \dots + A_n \cos^n \frac{\pi x}{\omega} + \dots + \\
&+ \sin \frac{\pi x}{\omega} \left[B_1 + B_2 \cos \frac{\pi x}{\omega} + \dots + B_n \cos^{n-1} \frac{\pi x}{\omega} + \dots \right],
\end{aligned}$$

Gomes Teixeira termina o artigo com uma aplicação da teoria que o compõe esta segunda parte: o desenvolvimento de uma função em potências de sin, numa área ilimitada.

Capítulo 4

Análise do segundo artigo

Tal como foi referido, este artigo é muito mais geral do que o primeiro. É possível que Gomes Teixeira tenha feito o tradicional caminho do particular para o geral, pois aqui, em vez de se propor desenvolver as funções apenas em termos de potências de senos e co-senos, o objectivo passa a ser obter uma série de potências de qualquer função $\Theta(z)$.

Igualmente publicado do *Crelle Journal*, em 1900 e não 1896 como consta do título¹ presente em TEIXEIRA 1900, p.127, este artigo inclui o resultado apelidado como *Teorema de Teixeira*, que podemos encontrar em WEISSTEIN [2000] enunciado da seguinte forma:

Let $f(z)$ be a function of z analytic in a ring-shaped region A , bounded by another curve C and an inner curve c . Let $\theta(z)$ be a function analytic on and inside C having only one zero a (which is simple) within the contour. Further let x be a given point within A . Finally, let

$$|\theta(x)| < |\theta(z)|$$

for all points z of C , and

$$|\theta(x)| > |\theta(z)|$$

for all points z of c . Then

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n [\theta(x)]^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{[\theta(x)]^n},$$

¹No índice do vol. I das Obras, esta data está correcta, não estando em consonância com o título.

where

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\theta'(z)dz}{[\theta(z)]^{(n+1)}} \\ B_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z)[\theta(z)]^{(n-1)}\theta'(z)dz \end{aligned}$$

WEISSTEIN [2000]

Encontramos o mesmo teorema em WHITTAKER [1927] e, claro, nas páginas 130 e 131 do volume das Obras Completas onde encontramos o artigo que vamos analisar.

Para além deste, são enunciados mais alguns teoremas que se aplicam de acordo com o tipo de área em que a função é holomorfa.

Foi suprimida, da presente análise, uma secção inteira deste artigo. A razão para tal facto é simples, tal como podemos ver pelo seu título: *Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$* , esta secção é uma repetição do primeiro artigo que analisámos nesta dissertação, com a agravante de ser abordado com relativa superficialidade, não apresentando nada de novo.

Não obstante, uma vez mais, procurámos analisar, justificar e completar da forma mais rigorosa que nos foi possível, todos os passos dados por Gomes Teixeira, para que o leitor do texto original, encontre aqui o apoio necessário ao acompanhamento, sem dificuldades, das palavras de Teixeira.

4.1 Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée

4.1.1 Sur le développement de $f(x)$ en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de $\Theta(x)$

O segundo artigo em análise, é uma generalização do que foi dito no anterior, para uma qualquer função $\Theta(z)$.

Gomes Teixeira começa por colocar algumas condições iniciais:

Supposons: 1°. que $f(z)$ soit une fonction holomorphe dans une couronne A , limitée extérieurement par une courbe S et intérieurement par une courbe s ; 2°. que $\Theta(z)$ soit une fonction holomorphe dans l'aire limitée par S , possédant à l'intérieur de ce contour un seul zéro a ; 3°. que x soit l'affixe d'un point de l'intérieur de la couronne considérée; 4°. qu'on ait, pour tous les points z du contour S ,

$$|\Theta(x)| < |\Theta(z)|, \quad (4.1.1)$$

et, pour tous les points du contour s ,

$$|\Theta(x)| > |\Theta(z)|. \quad (4.1.2)$$

TEIXEIRA 1900, p.130

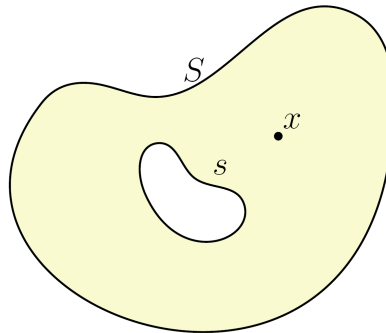


Fig. 4.1: Coroa formada por S e s .

Sendo que, queremos fazer a expansão de $f(x)$ segundo potências de $\Theta(x)$, vamos usar 4.1.1 e expandir

$$\frac{1}{\Theta(z) - \Theta(x)}$$

segundo o resultado conhecido, já referido, de desenvolvimento da fracção $\frac{1}{1-x}$ quando $|x| < 1$.

$$\frac{1}{\Theta(z) - \Theta(x)} = \frac{1}{\Theta(z)} + \frac{\Theta(x)}{\Theta^2(z)} + \frac{\Theta^2(x)}{\Theta^3(z)} + \dots \quad (4.1.3)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\Theta(x)]^{n-1}}{[\Theta(z)]^n} \quad (4.1.4)$$

Com isto justificamos a igualdade (1) de

$$\frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2i\pi} \left[\int_S \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)} + \Theta(x) \int_S \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta^2(z)} + \dots \right] \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)}$$

TEIXEIRA 1900, p.130

Demonstração. A igualdade (2) verifica-se porque as expressões da forma

$$\frac{\Theta'(z)}{\Theta^n(z)}$$

são derivadas de

$$-\frac{\Theta^{-(n+1)}(z)}{(n+1)}$$

e, por isso, os integrais podem ser escritos da forma,

$$\int_S \left(-\frac{\Theta^{-(n+1)}(z)}{(n+1)} \right)' dz = -\frac{\Theta^{-(n+1)}(z)}{(n+1)} \Big|_S$$

Como S é um caminho fechado, todos esses integrais se reduzem a 0.

□

Da expressão na citação anterior, Gomes Teixeira retira que

L'équation

$$\Theta(z) - \Theta(x) = 0$$

a, dans ce cas, une seule racine $z = x$ à l'intérieur de S , (...) le premier et le dernier membres représentent respectivement le nombre des racines de l'équation considérée et celui des racines de l'équation $\Theta(z) = 0$ qui existent à l'intérieur de S .

TEIXEIRA 1900, p.130

Encontramos nesta conclusão o Princípio do Argumento (ver apêndice A.1.3). Como $\Theta(z)$ é holomorfa e tem apenas um zero, no interior de S , então,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)} = 1 - 0 = 1.$$

Pelo que,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)} = 1.$$

O que leva a concluir que $\Theta(z) - \Theta(x)$ tem, realmente, apenas um zero na área considerada.

Como estamos na presença de uma coroa, o contorno onde aplicamos o teorema de Cauchy, não é S , mas sim S percorrido no sentido positivo e s no sentido negativo, os dois contornos são unidos por dois segmentos de recta. O valor do integral ao longo de um desses segmentos é simétrico ao outro, e por isso a sua soma é nula.

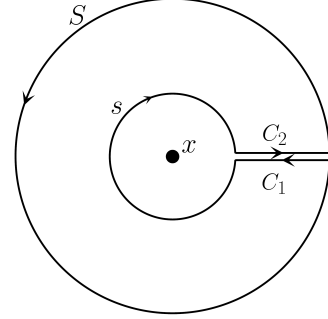


Fig. 4.2: Forma e orientação do contorno.

Da fórmula integral de Cauchy e fazendo as devidas adaptações para o caso em análise, ficamos com:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \left[\int_S \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)} - \int_s \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)} \right].$$

Les intégrales, qui entrent dans cette formule, peuvent être développées suivant les puissances de $\Theta(x)$ au moyen des formules

$$\int_S \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta^n(x) \int_S \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta^n(z)}$$

$$\int_s \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Theta^n(x)} \int_s f(z)\Theta^{n-1}(z)\Theta'(z)dz$$

TEIXEIRA 1900, p.131

Demonstração. A demonstração da primeira das fórmulas faz-se recorrendo ao desenvolvimento de $\frac{1}{\Theta(z)-\Theta(x)}$ tal como descrito acima. Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_s \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)} &= \int_s \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)} + \Theta(x) \int_s \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta^2(z)} + \dots \Leftrightarrow \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Theta^n(x) \int_s \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta^n(z)}. \end{aligned}$$

Podemos retirar $\Theta^n(x)$ do integral pois não depende da variável relativamente à qual estamos a integrar.

Quanto à segunda equação, como estamos a considerar o contorno s , temos a condição

$$|\Theta(x)| > |\Theta(z)|.$$

E por isso, não podemos desenvolver $\frac{1}{\Theta(z)-\Theta(x)}$ directamente, pois não temos as condições necessárias. Vamos, em vez disso, recorrer à igualdade:

$$\frac{1}{\Theta(z) - \Theta(x)} = - \frac{1}{\Theta(x) - \Theta(z)},$$

e agora sim, desenvolver o segundo membro usando a técnica anterior:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\Theta(x) - \Theta(z)} &= - \frac{1}{\Theta(x)} - \frac{\Theta(z)}{\Theta^2(x)} - \frac{\Theta^2(z)}{\Theta^3(x)} - \dots \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta^{n-1}(z)}{\Theta^n(x)} \end{aligned}$$

Aplicando o resultado acima ao integral, ficamos com

$$\begin{aligned}
\int_s \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)} &= \int_s f(z)\Theta'(z) \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta^{n-1}(z)}{\Theta^n(x)} \right] dz \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Theta^n(x)} \int_s f(z)\Theta^{n-1}(z)\Theta'(z)dz
\end{aligned}$$

□

Conclui-se facilmente que o desenvolvimento de $f(x)$ segundo potências de $\Theta(x)$ é dado por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Theta^n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\Theta^n(x)}.$$

où

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta^{n+1}(z)}, \\
B_n &= \frac{1}{2i\pi} \int_s f(z)\Theta^{n-1}(z)\Theta'(z)dz,
\end{aligned}$$

TEIXEIRA 1900, p.131

Podemos ainda escrever os coeficientes A_n e B_n da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{2ni\pi} \int_S \frac{f'(z)dz}{\Theta^n(z)} \\
B_n &= -\frac{1}{2ni\pi} \int_s f'(z)\Theta^n(z)dz
\end{aligned}$$

Demonstração. Demonstramos a equivalência entre as duas formas de cálculo, tanto de A_n como de B_n , recorrendo à integração por partes da primeira forma apresentada.

Começemos por A_n .

Usando

$$\begin{aligned}
u &= f(z), & u' &= f'(z), \\
v' &= \frac{\Theta'(z)}{\Theta^{n+1}(z)}, & v &= -\frac{1}{n\Theta^n(z)}.
\end{aligned}$$

resulta que

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \left(-\frac{f(z)}{n\Theta^n(z)} + \int_S \frac{f'(z)dz}{n\Theta^n(z)} \right)$$

Como estamos a integrar sobre uma curva fechada, então podemos igualar $-\frac{f(z)}{n\Theta^n(z)}$ a 0, e temos como resultado final:

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f'(z)dz}{n\Theta^n(z)}$$

Quanto a B_n , consideramos:

$$\begin{aligned} u &= f(z), & u' &= f'(z), \\ v &= \Theta^{n-1}(z)\Theta'(z), & v &= \frac{\Theta^n(z)}{n} \end{aligned}$$

e portanto

$$B_n = \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{f(z)\Theta^n(z)}{n} - \int_s \frac{f'(z)\Theta^n(z)}{n} dz \right)$$

Pelo mesmo motivo que anteriormente, a parte $\frac{f(z)\Theta^n(z)}{n}$ é nula. Resulta então que

$$B_n = -\frac{1}{2ni\pi} \int_s f'(z)\Theta^n(z)dz$$

□

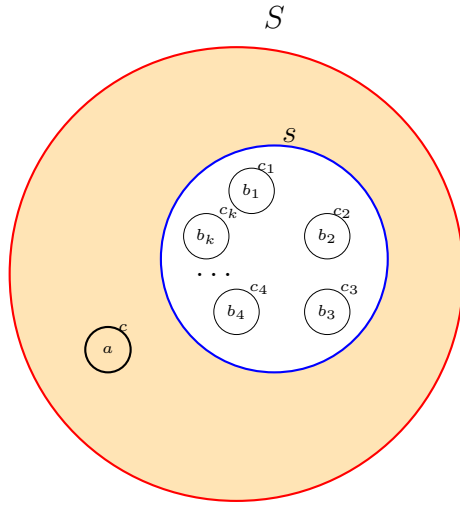
No texto de Gomes Teixeira, encontramos o que pensamos ser uma gralha tipográfica na apresentação da igualdade entre as duas formas de calculo de B_n , visto o contorno considerado ser S em vez de s .

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z) \Theta'(z) dz}{\Theta^{n+1}(z)} = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f'(z) dz}{n \Theta^n(z)} = \sum_{m=1}^k \frac{1}{2ni\pi} \int_{c_m} \frac{f'(z) dz}{\Theta^n(z)} + \frac{1}{2ni\pi} \int_c \frac{f'(z) dz}{\Theta^n(z)},$$

$$B_n = \frac{1}{2i\pi} \int_S f(z) \Theta^{n-1}(z) \Theta'(z) dz = -\frac{1}{2ni\pi} \int_S f'(z) \Theta^n(z) dz = -\frac{1}{2ni\pi} \sum_{m=1}^k \int_{c_m} f'(z) \Theta^n(z) dz,$$

Fig. 4.3: Gralha tipográfica na igualdade de B_n .

Pode, no entanto, acontecer que no interior do contorno s , exista um número finito de pólos.



Soient b_1, b_2, \dots, b_k ces points et soient c_1, c_2, \dots, c_k, c des circonférences dont les centres sont les points d'affixes b_1, b_2, \dots, b_k, a et dont les rayons sont assez petits pour qu'ils n'existent pas deux à l'intérieur d'une même circonférence.

TEIXEIRA 1900, p.131

Fig. 4.4: Ilustração da coroa formada pelos contornos S e s .

O integral sobre o contorno S transforma-se na soma dos integrais sobre os contornos c_m com $m = 1, \dots, k$ e c . Já o integral sobre o contorno s , será apenas a soma dos integrais sobre os contornos c_m , visto serem apenas os pontos b_m , os pólos no interior desse contorno.

Gomes Teixeira dá-nos então os seguintes resultados:

$$A_n = \sum_{m=1}^k \frac{1}{2ni\pi} \int_{c_m} \frac{f'(z) dz}{\Theta^n(z)} + \frac{1}{2ni\pi} \int_c \frac{f'(z) dz}{\Theta^n(z)},$$

$$B_n = -\frac{1}{2ni\pi} \sum_{m=1}^k \int_{c_m} f'(z) \Theta^n(z) dz.$$

Supondo que a multiplicidade de b_i é α , Gomes Teixeira aplicou o teorema de Laurent (ver Apêndice A.2) aos integrais envolvidos, para chegar a outra fórmula de cálculo dos coeficiente A_n e B_n , usando os resíduos.

$$A_n = \sum_{m=1}^k \frac{1}{\alpha!n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(\frac{f'(x) (x - b_m)^{\alpha+1}}{\Theta^n(x)} \right) \right]_{x=b_m} + \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{f'(x)}{\theta^n(x)} \right) \right]_{x=a},$$

$$B_n = - \sum_{m=1}^k \frac{1}{\alpha!n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (f'(x) \Theta^n(x) (x - b_m)^{\alpha+1}) \right]_{x=b_m},$$

où $\theta(x) = \frac{\Theta(x)}{x - a}$.

TEIXEIRA 1900, p.132

Demonstração. Começemos com o integral

$$\frac{1}{2ni\pi} \int_{c_m} \frac{f'(z)dz}{\Theta^n(z)} \quad (4.1.5)$$

Em cada um dos c_m temos um só pólo de $f(z) - b_m$. Se a multiplicidade de um pólo relativamente a $f(z)$ é α , então, porque derivando a função, o grau do seu denominador aumenta em 1, a multiplicidade do pólo relativamente a $f'(z)$ passa a $\alpha + 1$.

Vamos então, de acordo com o referido no apêndice A.2, procurar o valor do resíduo $-c_{-1}$

$$c_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_m} \frac{f'(z)dz}{\Theta^n(z)}$$

Segundo a observação presente em A.2.2

$$c_{-1} = \frac{1}{((\alpha + 1) - 1)!} \frac{d^{(\alpha+1)-1} g(x)}{dx^{((\alpha+1)-1)}} \Big|_{x=b_m}$$

onde $g(x) = \frac{f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}}{\Theta^n(x)}$.

Fazendo as simplificações possíveis:

$$c_{-1} = \frac{1}{\alpha!} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(\frac{f'(x) (x - b_m)^{\alpha+1}}{\Theta^n(x)} \right) \Big|_{x=b_m}.$$

Posto isto, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2ni\pi} \int_{c_m} \frac{f'(z)dz}{\Theta^n(z)} &= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_{c_m} \frac{f'(z)dz}{\Theta^n(z)} \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\alpha!} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(\frac{f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}}{\Theta^n(x)} \right) \right]_{x=b_m} \\
&= \frac{1}{\alpha!n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(\frac{f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}}{\Theta^n(x)} \right) \right]_{x=b_m}.
\end{aligned}$$

Passemos para o integral:

$$\frac{1}{2ni\pi} \int_c \frac{f'(z)dz}{\Theta^n(z)} \quad (4.1.6)$$

Por definição sabemos que a é zero de $\Theta(z)$.

Será portanto pólo de

$$\frac{f'(z)}{\Theta^n(z)}.$$

Como temos $\Theta^n(z)$ significa que a multiplicidade desse pólo será n .

Seguindo o raciocínio anterior fazemos

$$g(x) = \frac{f'(x)(x-a)^n}{\Theta^n(x)}.$$

Usamos, de novo, a observação de A.2.2, e obtemos:

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{f'(x)(x-a)^n}{\Theta^n(x)} \right) \right]_{x=a}$$

como Gomes Teixeira faz $\theta(x) = \frac{\Theta(x)}{x-a}$, conseguimos substituir

$$\frac{(x-a)^n}{\Theta^n(x)}$$

por

$$\frac{1}{\theta^n(x)}$$

resultando em

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{f'(x)}{\theta^n(x)} \right) \right]_{x=a}$$

Voltando a 4.1.6, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2ni\pi} \int_c \frac{f'(z)dz}{\Theta^n(z)} &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f'(z)dz}{\Theta^n(z)} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{f'(x)}{\theta^n(x)} \right) \right]_{x=a} \right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{f'(x)}{\theta^n(x)} \right) \right]_{x=a} \\
&= \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{f'(x)}{\theta^n(x)} \right) \right]_{x=a}.
\end{aligned}$$

Pelo que se viu acima, A_n pode, então, ser escrito da forma:

$$A_n = \sum_{m=1}^k \frac{1}{\alpha!n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(\frac{f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}}{\Theta^n(x)} \right) \right]_{x=b_m} + \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{f'(x)}{\theta^n(x)} \right) \right]_{x=a}.$$

Vejamos, por último, o integral de B_n :

$$\int_{c_m} f'(z)\Theta^n(z)dz.$$

Continuamos com a mesma estratégia de resolução e desta feita fazemos

$$g(x) = f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}.$$

Sai que,

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c_m} f'(z)\Theta^n(z)dz \\
&= \frac{1}{((\alpha+1)-1)!} \left[\frac{d^{(\alpha+1)-1}}{dx^{(\alpha+1)-1}} (f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}) \right]_{x=b_m} \\
&= \frac{1}{\alpha!} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}) \right]_{x=b_m}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, podemos desenvolver o cálculo de B_n da forma que se segue:

$$\begin{aligned}
B_n &= -\frac{1}{2ni\pi} \sum_{m=1}^k \int_{c_m} f'(z) \Theta^n(z) dz \\
&= -\frac{1}{n} \sum_{m=1}^k \frac{1}{2i\pi} \int_{c_m} f'(z) \Theta^n(z) dz \\
&= -\sum_{m=1}^k \frac{1}{n} \frac{1}{\alpha!} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}) \right]_{x=b_m} \\
&= -\sum_{m=1}^k \frac{1}{\alpha!n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}) \right]_{x=b_m}.
\end{aligned}$$

□

Mas estes resultados, só seriam válidos se a não fosse também um pólo de $f(x)$, facto que não temos por certo. Isso levou Gomes Teixeira a considerar, de seguida, essa possibilidade.

Il peut arriver que a soit aussi un pôle de $f(x)$. Il est facile de voir qu'alors on doit calculer A_n au moyen de la formule

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{m=1}^k \frac{1}{\alpha!n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(\frac{f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}}{\Theta^n(x)} \right) \right]_{x=b_m} + \\
&\quad + \frac{1}{(n+\beta)!n} \left[\frac{d^{\beta+n}}{dx^{\beta+n}} \left(\frac{f'(x)(x-a)^{\beta+1}}{\theta^n(x)} \right) \right]_{x=a}
\end{aligned}$$

β représentant le degré de multiplicité du pôle a , et que la formule qui donne B_n doit être remplacée par la suivante:

$$\begin{aligned}
B_n &= -\sum_{m=1}^k \frac{1}{\alpha!n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (f'(x) \Theta^n(x) (x-b_m)^{\alpha+1}) \right]_{x=b_m} - \\
&\quad - \frac{1}{(\beta-n)!n} \left[\frac{d^{\beta-n}}{dx^{\beta-n}} (f'(x) \theta^n(x) (x-a)^{\beta+1-n}) \right]_{x=a},
\end{aligned}$$

quand $n \leq \beta$.

TEIXEIRA 1900, p.132

Demonstração. Mais uma vez, comecemos com A_n . Neste caso o primeiro somatório mantém-se e apenas se altera aquele que está relacionado com a .

Considera-se então, que a é um pólo de $f(x)$, de ordem β .

Assim sendo, tal como antes, a multiplicidade de a relativamente à derivada da função, $f'(x)$, é $\beta + 1$.

Para encontrarmos c_{-1} , aplicando a mesma observação do apêndice A.2.2 temos que ter uma função $g(x)$ na forma:

$$\frac{f'(x)(x-a)^{\beta+1}}{\theta^n(x)} = \frac{f'(x)(x-a)^n}{\Theta^n(x)}(x-a)^{\beta+1} = \frac{f'(x)}{\Theta^n(x)}(x-a)^{n+\beta+1}.$$

c_{-1} é:

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \frac{1}{((n+\beta+1)-1)!} \left[\frac{d^{(n+\beta+1)-1}}{dx^{(n+\beta+1)-1}} g(x) \right]_{x=a} \\ &= \frac{1}{(n+\beta)!} \left[\frac{d^{n+\beta}}{dx^{n+\beta}} g(x) \right]_{x=a} \end{aligned}$$

E portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2ni\pi} \int_c \frac{f'(z)dz}{\Theta^n(x)} &= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{(n+\beta)!} \left[\frac{d^{n+\beta}}{dx^{n+\beta}} g(x) \right]_{x=a} \right] \\ &= \frac{1}{(n+\beta)!n} \left[\frac{d^{n+\beta}}{dx^{n+\beta}} g(x) \right]_{x=a} \\ &= \frac{1}{(n+\beta)!n} \left[\frac{d^{n+\beta}}{dx^{n+\beta}} \left(\frac{f'(x)(x-a)^{\beta+1+n}}{\Theta^n(x)} \right) \right]_{x=a} \\ &= \frac{1}{(n+\beta)!n} \left[\frac{d^{n+\beta}}{dx^{n+\beta}} \left(\frac{f'(x)(x-a)^{\beta+1}}{\theta^n(x)} \right) \right]_{x=a} \end{aligned}$$

E chegámos à expressão indicada por Gomes Teixeira na citação anterior:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{m=1}^k \frac{1}{\alpha!n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(\frac{f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}}{\Theta^n(x)} \right) \right]_{x=b_m} + \\ &+ \frac{1}{(n+\beta)!n} \left[\frac{d^{\beta+n}}{dx^{\beta+n}} \left(\frac{f'(x)(x-a)^{\beta+1}}{\theta^n(x)} \right) \right]_{x=a} \end{aligned}$$

Estude-se agora B_n .²

²A equação de cálculo de B_n , presente na citação foi alterada relativamente à apresentada no texto de Gomes Teixeira, devido à falta de um delimitador.

A função $g(x)$ será da forma:

$$g(x) = (x - a)^{\beta+1} f'(x) \Theta^n(x).$$

mas a é zero de $\Theta(x)$ e portanto zero de ordem n para $\Theta^n(x)$.

Tendo em conta que $\Theta(x) = \theta(x)(x - a)$, é lógico que a multiplicidade do pólo a relativamente a $f'(x)\theta^n(x)(x - a)^n$ seja igual a $\beta + 1 - n$.

$g(x)$ passa a ser:

$$g(x) = (x - a)^{\beta+1-n} f'(x) \theta^n(x).$$

Calculando o coeficiente c_{-1} da série de Laurent, temos:

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \frac{1}{((\beta + 1 - n) - 1)!} \left[\frac{d^{(\beta+1-n)-1}}{dx^{(\beta+1-n)-1}} f'(x) \theta^n(x) (x - a)^{(\beta+1)-n} \right]_{x=a} \\ &= \frac{1}{(\beta - n)!} \left[\frac{d^{\beta-n}}{dx^{\beta-n}} f'(x) \theta^n(x) (x - a)^{\beta+1-n} \right]_{x=a} \end{aligned}$$

B_n passa a ser então:

$$\begin{aligned} B_n &= -\frac{1}{2ni\pi} \sum_{m=1}^k f'(z) \Theta^n(z) dz \\ &= -\frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^k \frac{1}{\alpha!} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (f'(x) \Theta^n(x) (x - b_m)^{\alpha+1}) \right]_{x=b_m} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\beta - n)!} \left[\frac{d^{\beta-n}}{dx^{\beta-n}} f'(x) \theta^n(x) (x - a)^{\beta+1-n} \right]_{x=a} \right) \\ &= -\sum_{m=1}^k \frac{1}{\alpha! n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (f'(x) \Theta^n(x) (x - b_m)^{\alpha+1}) \right]_{x=b_m} \\ &\quad - \frac{1}{(\beta - n)!} \left[\frac{d^{\beta-n}}{dx^{\beta-n}} f'(x) \theta^n(x) (x - a)^{\beta+1-n} \right]_{x=a} \end{aligned}$$

□

Ao contrário do que aconteceu no artigo anterior, Gomes Teixeira alerta aqui para o facto de, como temos n em denominador, não podermos usar as fórmulas indicadas para calcular A_0 . Dando-nos, por isso, uma fórmula de cálculo para este coeficiente particular:

$$A_0 = \sum_{m=1}^k \frac{1}{2i\pi} \int_{c_m} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)} + \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)} \quad (4.1.7)$$

qui donne

$$A_0 = \sum_{m=1}^k \frac{1}{(\alpha-1)!} \left[\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} \left(\frac{f(x)\Theta'(x)(x-b_m)^\alpha}{\Theta(x)} \right) \right]_{x=b_m} + f(a), \quad (4.1.8)$$

quand a est un point ordinaire de $f(x), (\dots)$

TEIXEIRA 1900, p.132

Demonstração. A primeira equação da citação anterior, resulta da aplicação directa do teorema dos resíduos de Cauchy (ver A.1.2) à fórmula:

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z)\Theta'(z)}{\Theta^{n+1}(z)}$$

fazendo $n = 0$.

A segunda expressão citada, é consequência da primeira, pela aplicação do Teorema de Laurent.

Como neste caso consideramos directamente $f(z)$, então a multiplicidade do pólo é α . E não $\alpha + 1$ como nos outros casos em que trabalhávamos com $f'(z)$.

Assim sendo, temos,

$$c_{-1} = \frac{1}{(\alpha-1)!} \left[\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} \frac{f(z)\Theta'(x)(x-b_m)^\alpha}{\Theta(x)} \right]_{x=b_m}$$

E portanto,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c_m} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)} = \frac{1}{(\alpha-1)!} \left[\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} \frac{f(z)\Theta'(x)(x-b_m)^\alpha}{\Theta(x)} \right]_{x=b_m}$$

Porque $f(z)$ é holomorfa em a , o valor de

$$\frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)}$$

é $f(a)$. □

Contudo, mais uma vez, pode acontecer que a seja um pólo de $f(x)$, de ordem β , e para esse caso, Gomes Teixeira dá-nos a fórmula

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sum_{m=1}^k \frac{1}{(\alpha-1)!} \left[\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} \left(\frac{f(x)\Theta'(x)(x-b_m)^\alpha}{\Theta(x)} \right) \right]_{x=b_m} + \\
&+ \frac{1}{\beta!} \left[\frac{d^\beta}{dx^\beta} \left(\frac{f(x)\Theta'(x)(x-a)^\beta}{\theta(x)} \right) \right]_{x=a}.
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

O facto de a ser agora um pólo de $f(x)$, tem consequências inevitáveis nos cálculos. Deixamos de poder usar o exposto no apêndice A.1.1 e concluir imediatamente que $\frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)} = f(a)$ e temos que procurar o verdadeiro valor dessa expressão. Não obstante, a primeira parte da expressão 4.1.8 mantém-se.

Demonstração. Partimos, de

$$\frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)}.$$

Como sabemos que $\Theta(x) = \theta(x)(x-a)$, ficamos com

$$\frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\theta(z)(z-a)}.$$

Se tínhamos que a era pólo de ordem β então, para esta função, ficamos com uma ordem $\beta+1$. E sendo assim, usamos de novo a observação presente em A.2.2, considerando a função

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{(x-a)^{\beta+1}f(x)\Theta'(x)}{\theta(x)(x-a)} \\
&= \frac{(x-a)^\beta f(x)\Theta'(x)}{\theta(x)}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)} \\
&= \frac{1}{(\beta+1-1)!} \left[\frac{d^{\beta+1-1}}{dx^{\beta+1-1}} \frac{(x-a)^\beta f(x)\Theta'(x)}{\theta(x)} \right]_{x=a} \\
&= \frac{1}{\beta!} \left[\frac{d^\beta}{dx^\beta} \frac{(x-a)^\beta f(x)\Theta'(x)}{\theta(x)} \right]_{x=a}
\end{aligned}$$

Somando a expressão que acabámos de encontrar com a primeira parte de 4.1.8,

que, como dissemos, se mantém inalterada, ficamos com a expressão que queríamos: 4.1.9.

□

Encontrámos, no texto original, uma incorrecção na fórmula 4.1.9. Tal como podemos ver na figura seguinte, o factor $(x - b_m)$ está elevado à potência β , mas este expoente diz respeito à multiplicidade do pólo b_m , relativamente à função $\frac{f(x)\Theta'(x)}{\Theta(x)}$, e que é, por hipótese, α e não β . Para reforço do que acabámos de afirmar, podemos comparar esta parte da expressão, com a correspondente quando a é um ponto ordinário de $f(x)$ – 4.1.8 – e, porque se deveria manter inalterada, verificar esta incorrecção.

$$A_0 = \sum_{m=1}^k \frac{1}{(\alpha-1)!} \left[\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} \left(\frac{f(x)\Theta'(x)(x-b_m)^\beta}{\Theta(x)} \right) \right]_{x=b_m} + \frac{1}{\beta!} \left[\frac{d^\beta}{dx^\beta} \left(\frac{f(x)\Theta'(x)(x-a)^\beta}{\theta(x)} \right) \right]_{x=a},$$

Fig. 4.5: Erro no expoente associado a $(x - b_m)$.

Um caso sobre o qual Gomes Teixeira chama a atenção, é aquele em que $\Theta(x)$ é um número dado, que denomina t . Nesse caso, de acordo com o exposto até aqui, a expansão de $f(x)$ será:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{t^n}.$$

Teixeira termina esta secção com uma aplicação da toda a teoria explicada anteriormente.

4.1.2 Sur les séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{x-a}{x-b}$

Nesta fase, Gomes Teixeira considera $\Theta(x) = \frac{x-a}{x-b}$, onde a e b são dois números dados. Isto não altera a base teórica exposta anteriormente, mas é uma função que revela algumas particularidades, em especial no que respeita à área em que se vai desenvolver a função.

Teixeira começa por procurar as curvas S e s que vão delimitar essa mesma área. Assim,

Pour étudier ces développements, il faut chercher deux courbes S et s telles que, pour tout point z de S et pour tout point x à l'intérieur de la couronne qu'elles limitent, on ait

$$\left| \frac{x-a}{x-b} \right| < \left| \frac{z-a}{z-b} \right|,$$

et, pour tout point z de s et pour les mêmes valeurs de x , on ait

$$\left| \frac{x-a}{x-b} \right| > \left| \frac{z-a}{z-b} \right|.$$

TEIXEIRA 1900, p.135

Torna-se necessário, estudar as curvas dadas por:

$$\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = C,$$

havendo uma clara semelhança com as curvas estudadas no primeiro artigo: $|\sin z| = c$.

C é uma constante e todos os outros elementos são complexos, Gomes Teixeira define-os assim:

$$z = X + iY, \quad a = \alpha + i\beta, \quad b = \alpha' + i\beta',$$

e, com estas transformações, chega a:

$$(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = \frac{C^2 [(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2]}{(1 - C^2)^2} \quad (4.1.10)$$

où

$$x_1 = \frac{\alpha - \alpha' C^2}{1 - C^2}, \quad y_1 = \frac{\beta - \beta' C^2}{1 - C^2}. \quad (4.1.11)$$

TEIXEIRA 1900, p.135

Demonstração. Com as referidas transformações, podemos fazer

$$\left| \frac{z - a}{z - b} \right| = \left| \frac{X + iY - (\alpha - i\beta)}{X + iY - (\alpha' + i\beta')} \right|$$

e ficamos com,

$$\begin{aligned} \left| \frac{X + iY - (\alpha - i\beta)}{X + iY - (\alpha' + i\beta')} \right| &= C \Leftrightarrow \\ \frac{|X + iY - (\alpha - i\beta)|}{|X + iY - (\alpha' + i\beta')|} &= C \Leftrightarrow \end{aligned}$$

usando o facto de $|z|^2 = z\bar{z}$. Podemos pôr

$$\begin{aligned} \frac{((X - \alpha) + i(Y - \beta))((X - \alpha) - i(Y - \beta))}{((X - \alpha') + i(Y - \beta'))((X - \alpha') - i(Y - \beta'))} &= C^2 \Leftrightarrow \\ \frac{(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2}{(X - \alpha')^2 + (Y - \beta')^2} &= C^2 \end{aligned}$$

Desenvolvendo os quadrados e fazendo as multiplicações presentes em

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = C^2 \left((X - \alpha')^2 + (Y - \beta')^2 \right)$$

chegamos a

$$\begin{aligned} X^2 (1 - C^2) - 2X (\alpha - \alpha' C^2) + \alpha^2 - C^2 \alpha^2 - C^2 \alpha'^2 &+ \\ + Y^2 (1 - C^2) - 2Y (\beta - \beta' C^2) + \beta^2 - C^2 \beta^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ (1 - C^2) \left(X^2 - 2X \frac{(\alpha - \alpha' C^2)}{1 - C^2} \right) + \alpha^2 - C^2 \alpha'^2 &+ \\ + (1 - C^2) \left(Y^2 - 2Y \frac{(\beta - \beta' C^2)}{1 - C^2} \right) + \beta^2 - C^2 \beta'^2 &= 0 \end{aligned}$$

Para chegarmos a um quadrado, fazemos:

$$\begin{aligned} \left(X^2 - 2X \frac{(\alpha - \alpha' C^2)}{1 - C^2} \right) &= \left(X^2 - 2X \frac{(\alpha - \alpha' C^2)}{1 - C^2} + \left(\frac{\alpha - \alpha' C^2}{1 - C^2} \right)^2 - \left(\frac{\alpha - \alpha' C^2}{1 - C^2} \right)^2 \right) \\ &= \left(X - \frac{\alpha - \alpha' C^2}{1 - C^2} \right)^2 - \frac{(\alpha - \alpha' C^2)^2}{1 - C^2}, \end{aligned}$$

e repetimos o processo para

$$\left(Y^2 - 2Y \frac{(\beta - \beta' C^2)}{1 - C^2} \right).$$

Resulta então,

$$\begin{aligned} & (1 - C^2) \left(X - \underbrace{\frac{\alpha - \alpha' C^2}{1 - C^2}}_{x_1} \right)^2 - \frac{C^2 (\alpha^2 - 2\alpha\alpha' + \alpha'^2)}{1 - C^2} + \\ & + (1 - C^2) \left(Y - \underbrace{\frac{\beta - \beta' C^2}{1 - C^2}}_{y_1} \right)^2 - \frac{C^2 (\beta^2 - 2\beta\beta' + \beta'^2)}{1 - C^2} = 0 \\ & (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = \frac{C^2 [(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2]}{(1 - C^2)^2} \end{aligned}$$

□

Cette equation (4.1.10) représente des circonférences dont les centres (x_1, y_1) sont placés sur la droite que passe par les points dont les affixes sont a et b .

TEIXEIRA 1900, p.136

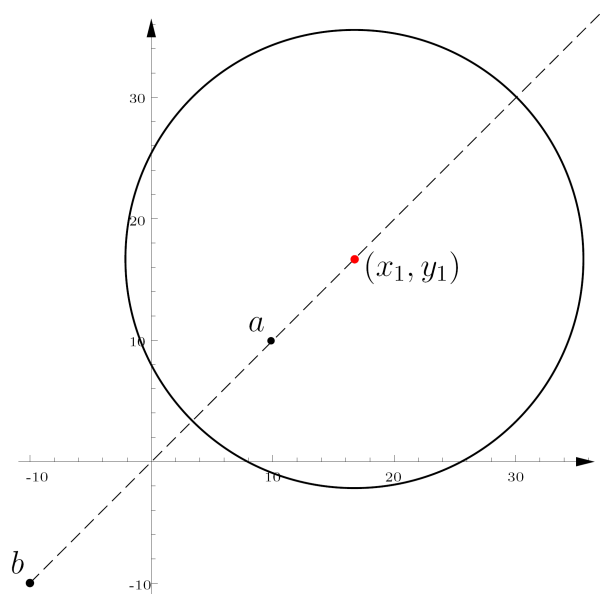


Fig. 4.6: Circunferência com centro na recta ab

Aux valeurs que prend C^2 , quand il varie depuis 0 jusqu'à 1, il correspond un ensemble de circonférences dont les rayons varient depuis 0 jusqu'à l'infini et dont les centres varient depuis le point (α, β) , qui représente a et qui correspond à $C = 0$, jusqu'à l'infini, en restant toujours du même côté du point (α, β) . Chaque circonférence de cet ensemble contient à l'intérieur celles qui correspondent à des valeurs inférieurs de C^2 , et le point dont l'afixe est a , est à l'intérieur de toutes ces circonférences.

TEIXEIRA 1900, p.136

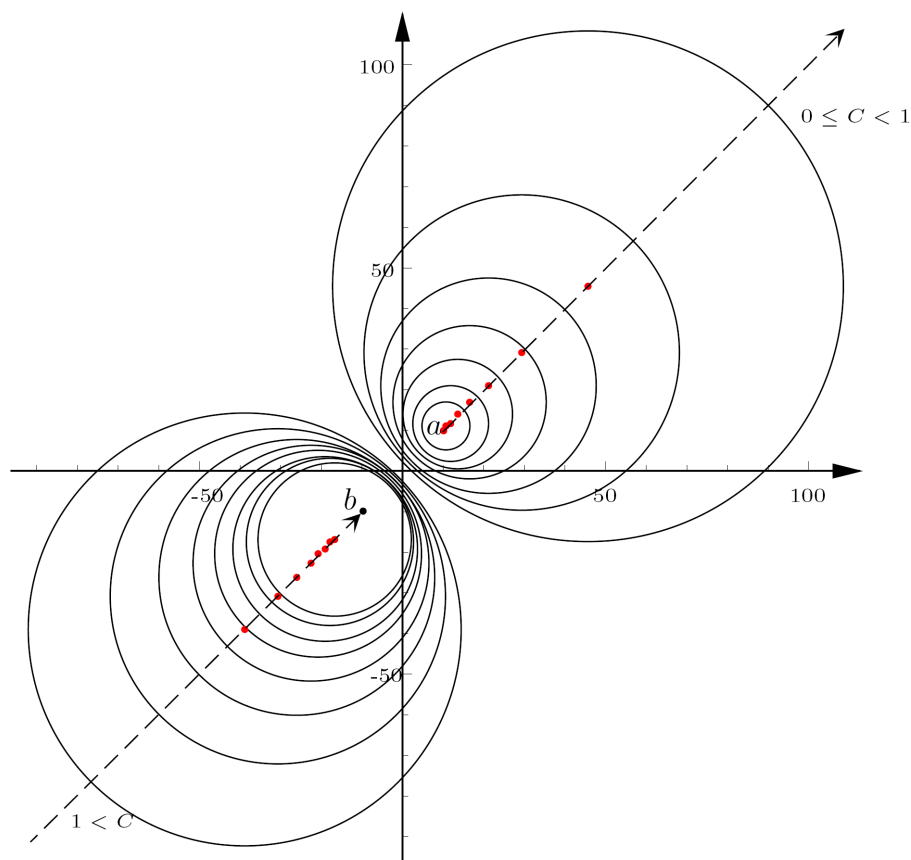


Fig. 4.7: Efeito da variação de C

A citação anterior explica o que acontece quando $0 \leq C \leq 1$, na figura apenas encontramos $0 \leq C < 1$ visto em $C = 1$ termos um raio infinito.

Quando $C > 1$ temos um outro conjunto de circunferências. Verifica-se que o raio tende para 0 quando C vai para ∞ . Os centros dessas circunferências tendem, também, a aproximar-se do ponto b cujas coordenadas são (α', β') , e, neste caso, cada circunferência contém no seu interior todas as circunferências seguintes, ou seja, as que correspondem a um C maior.

De facto, quando, em 4.1.11, colocamos $C = 0$, ficamos com:

$$x_1 = \frac{\alpha - \alpha' 0^2}{1 - 0^2}, \quad y_1 = \frac{\beta - \beta' 0^2}{1 - 0^2}.$$

Ou seja,

$$x_1 = \alpha, \quad y_1 = \beta.$$

Por outro lado, se nessas expressões, $C \rightarrow +\infty$, então

$$x_1 = \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{\alpha - \alpha' C^2}{1 - C^2} = \alpha',$$

e

$$y_1 = \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{\beta - \beta' C^2}{1 - C^2} = \beta'.$$

Sobre o caso em que $C = 1$, diz-nos Gomes Teixeira:

En cherchant les points d'intersection de la droite dont l'équation est

$$\frac{Y - \beta}{y_1 - \beta} = \frac{X - \alpha}{x_1 - \alpha}$$

laquelle passe par les points a et b, avec les circonférences représentées par l'équation 4.1.10, on trouve pour les valeurs des abscisses x' et x'' de ces points

$$x' = \frac{\alpha - C\alpha'}{1 - C}, \quad x'' = \frac{\alpha + C\alpha'}{1 + C},$$

et on voit qu'elles tendent la première vers l'infini et la seconde vers $\frac{\alpha + \alpha'}{2}$, quand C^2 tend vers l'unité. Donc les deux ensembles de circonférences représentées par l'équation 4.1.10 sont séparés par une droite K , perpendiculaire à la droite des centres, qui coupe cette droite dans un point équidistant de (α, β) et (α', β') (...) On peu voir que la droite K est le lieu des points où $\left| \frac{z - a}{z - b} \right| = 1$.

TEIXEIRA 1900, p.136

Demonstração. Investiguemos agora os factos apresentados na citação anterior.

O quadrado do raio da circunferência $r^2(C)$, é dado, para cada C , pela expressão:

$$r^2(C) = \frac{C^2 [(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2]}{(1 - C^2)^2}, \quad (4.1.12)$$

e fazendo a sua representação gráfica, tendo também em conta que $C \geq 0$, temos o seguinte:

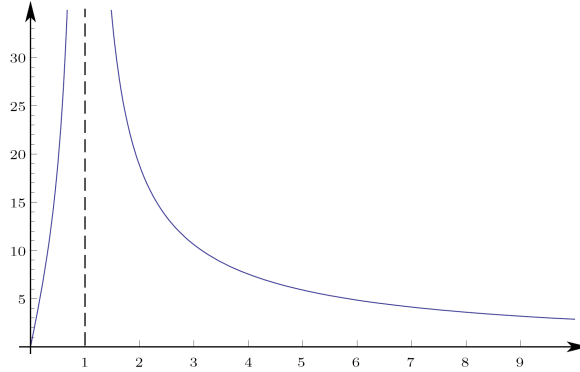


Fig. 4.8: Gráfico de $r^2(C)$

Podemos ver que o raio cresce até 1, sendo que aí é infinito, e decresce a partir desse ponto.

Encontramos as abcissas x' e x'' resolvendo o sistema

$$\begin{cases} (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = \frac{C^2 [(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2]}{(1 - C^2)^2} \\ \frac{Y - \beta}{y_1 - \beta} = \frac{X - \alpha}{x_1 - \alpha} \end{cases}$$

Vamos agora verificar a perpendicularidade entre a recta que passa pelos centros e a apresentada na citação. Para isso comparamos os declives das duas rectas.

O declive da recta que passa por $a = (\alpha, \beta)$ e $b = (\alpha', \beta')$ é $m = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}$.

Quanto à segunda recta, sabemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{z - a}{z - b} \right| &= 1 \Leftrightarrow \\ \sqrt{\left(\frac{z - a}{z - b} \right) \overline{\left(\frac{z - a}{z - b} \right)}} &= 1 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{z - a}{z - b} \right) \overline{\left(\frac{z - a}{z - b} \right)} &= 1 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{z - a}{z - b} \right) \left(\frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{z} - \bar{b}} \right) &= 1 \end{aligned}$$

Usando as substituições

$$\begin{cases} z = x + iy \\ a = \alpha + i\beta \\ b = \alpha' + i\beta' \end{cases}$$

chegamos a

$$\begin{aligned} (2\beta' - 2\beta)y &= (2\alpha - 2\alpha')x + \alpha'^2 + \beta'^2 - \alpha^2 - \beta^2 \\ y &= \underbrace{\frac{\alpha - \alpha'}{\beta' - \beta}}_{m'} x + \frac{\alpha'^2 + \beta'^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2(\beta' - \beta)} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

E, de facto, chegámos a um declive $m' = -\frac{1}{m}$.

Mas será que passa pelo ponto médio do segmento \overline{ab} ?

Se isso acontecer, teremos que,

$$y = \frac{\beta' + \beta}{2}$$

quando

$$x = \frac{\alpha + \alpha'}{2}.$$

Substituindo na recta encontrada em 4.1.13, o valor de x , ficamos com

$$\begin{aligned} y &= \frac{\alpha - \alpha'}{\beta' - \beta} \left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} \right) + \frac{\alpha'^2 + \beta'^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2(\beta' - \beta)} \Leftrightarrow \\ y &= \frac{(\alpha - \alpha')(\alpha + \alpha')}{2(\beta' - \beta)} + \frac{\alpha'^2 + \beta'^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2(\beta' - \beta)} \Leftrightarrow \\ y &= \frac{\beta'^2 - \beta^2}{2(\beta' - \beta)} \Leftrightarrow \\ y &= \underbrace{\frac{\beta' + \beta}{2}}_{y \text{ médio}} \end{aligned}$$

Temos então a confirmação de que a recta passa pelo ponto médio. □

Por tudo o que se viu até aqui, temos uma infinidade de coroas, limitadas pelas circunferências de equação 4.1.10. Como o raio depende do valor de C , então podemos

encontrar uma circunferência com raio C_1 e outra com raio C_2 , para o qual $C_1 < C < C_2$, e portanto, para todos os pontos z da circunferência com raio C_1 ,

$$\left| \frac{x-a}{x-b} \right| > \left| \frac{z-a}{z-b} \right|$$

e para todos os pontos z da circunferência com raio C_2 , temos,

$$\left| \frac{x-a}{x-b} \right| < \left| \frac{z-a}{z-b} \right|.$$

Conclui Gomes Teixeira:

De ce qu'on vient de démontrer dans les n^{os}. précédents, on conclut que, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans une couronne limitée par deux des circonférences représentées par les points de l'intérieur de cette couronne

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{x-b}{x-a} \right) \quad (4.1.14)$$

TEIXEIRA 1900, p.136

Os coeficientes A_n e B_n são determinados como anteriormente.

Se $f(x)$ for holomorfa, não apenas na coroa, mas sim em toda uma metade que resulta da divisão do plano pela recta K e que contém o ponto a , podemos escrever o desenvolvimento de $f(x)$ da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b} \right)^n$$

Segue-se, no texto de Gomes Teixeira, a aplicação desta última conclusão à função $f(x) = \log x$.

O ponto seguinte ocupa-se da questão:

Étant données deux circonférences dans le plan de représentation des x , l'une placée à l'intérieur de l'autre, et une fonction $f(x)$ holomorphe dans la couronne limitée par ces circonférences, est-il toujours possible de former une série de la forme 4.1.14 qui la représente dans la couronne considérée?

TEIXEIRA 1900, p.138

Para iniciar este estudo, Gomes Teixeira considerou que a circunferência externa tem centro na origem das coordenadas e raio dependente de C_1 . Sendo assim, $x_1 = 0$ e $y_1 = 0$.

Para que a resposta à questão acima seja positiva, então é necessário que seja possível encontrar valores reais para C_1^2 , C_2^2 , α , β , α' , β' .

Começamos então por substituir os valores de x_1 e y_1 nas equações

$$x_1 = \frac{\alpha - \alpha' C_1^2}{1 - C_1^2}, \quad y_1 = \frac{\beta - \beta' C_1^2}{1 - C_1^2}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\alpha - \alpha' C_1^2}{1 - C_1^2} \Leftrightarrow & 0 &= \frac{\beta - \beta' C_1^2}{1 - C_1^2} \Leftrightarrow \\ \alpha - \alpha' C_1^2 &= 0 \Leftrightarrow & 0 &= \beta - \beta' C_1^2 \Leftrightarrow \\ \alpha &= \alpha' C_1^2. & \beta &= \beta' C_1^2. \end{aligned}$$

Para a segunda circunferência, a circunferência interna, Gomes Teixeira não especificou o centro. Sendo assim, designaremos o centro com (x', y') e o raio resultado de um C_2 . Temos então, usando as mesmas equações,

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\alpha - \alpha' C_2^2}{1 - C_2^2} \Leftrightarrow & y' &= \frac{\beta - \beta' C_2^2}{1 - C_2^2} \Leftrightarrow \\ (1 - C_2^2) x' &= \alpha - \alpha' C_2^2. & (1 - C_2^2) y' &= \beta - \beta' C_2^2. \end{aligned}$$

Chegamos assim ao sistema:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha' C_1^2 \\ \beta = \beta' C_1^2 \\ (1 - C_2^2) x' = \alpha - \alpha' C_2^2 \\ (1 - C_2^2) y' = \beta - \beta' C_2^2 \end{cases} \quad (4.1.15)$$

Por outro lado, usando 4.1.12, podemos definir o seguinte:

$$\begin{cases} R_1^2 = \frac{C_1^2 [(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2]}{(1 - C_1^2)^2} \\ R_2^2 = \frac{C_2^2 [(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2]}{(1 - C_2^2)^2} \end{cases}$$

Do primeiro sistema vem

$$\begin{cases} \alpha = \alpha' C_1^2 \\ \alpha - \alpha' C_2^2 = (1 - C_2^2) x' \end{cases}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\alpha' C_1^2 - \alpha' C_2^2 &= (1 - C_2^2) x' \Leftrightarrow \\ \alpha' (C_1^2 - C_2^2) &= (1 - C_2^2) x' \Leftrightarrow \\ \alpha' &= \frac{1 - C_2^2}{C_1^2 - C_2^2} x' .\end{aligned}$$

Do mesmo sistema sai

$$\begin{cases} \beta = \beta' C_1^2 \\ \beta - \beta' C_2^2 = (1 - C_2^2) y' \end{cases}$$

que resulta em

$$\begin{aligned}\beta' C_1^2 - \beta' C_2^2 &= (1 - C_2^2) y' \Leftrightarrow \\ \beta' (C_1^2 - C_2^2) &= (1 - C_2^2) y' \Leftrightarrow \\ \beta' &= \frac{1 - C_2^2}{C_1^2 - C_2^2} y' .\end{aligned}$$

Com as igualdades que acabámos de verificar, tiramos outra expressão de cálculo dos quadrados dos raios:

$$\begin{aligned}R_1^2 &= \frac{C_1^2 [(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2]}{(1 - C_1^2)^2} \Leftrightarrow \\ R_1^2 &= \frac{C_1^2 [(\alpha' C_1^2 - \alpha')^2 + (\beta' C_1^2 - \beta')^2]}{(1 - C_1^2)^2} \Leftrightarrow \\ R_1^2 &= \frac{C_1^2 \left[\left(\frac{1 - C_2^2}{C_1^2 - C_2^2} x' \right)^2 (C_1^2 - 1)^2 + \left(\frac{1 - C_2^2}{C_1^2 - C_2^2} y' \right)^2 (C_1^2 - 1)^2 \right]}{(1 - C_1^2)^2} \Leftrightarrow \\ R_1^2 &= \frac{C_1^2 (1 - C_2^2)^2}{(C_1^2 - C_2^2)^2} (x'^2 + y'^2)\end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma para R_2^2 , encontramos

$$R_2^2 = \frac{C_2^2 (C_1^2 - 1)^2}{(C_1^2 - C_2^2)^2} (x'^2 + y'^2)$$

Gomes Teixeira sugere depois umas pequenas substituições:

$$(\dots) \text{ en posant } R_1 - R_2 = k, \frac{R_1}{R_2} = m, \sqrt{x'^2 + y'^2} = \rho,$$

$$k = \frac{1 + C_1 C_2}{C_1 + C_2} \rho, \quad m = \frac{C_1 (1 - C_2^2)}{C_2 (1 - C_1^2)}.$$

TEIXEIRA 1900, p.139

Demonstração. Para provar a primeira igualdade, vamos partir exactamente da primeira igualdade de k , ou seja, $R_1 - R_2 = k$.

$$\begin{aligned} k &= R_1 - R_2 \\ &= \frac{C_1 (1 - C_2^2)}{C_1^2 - C_2^2} \sqrt{x'^2 + y'^2} - \frac{C_2 (1 - C_1^2)}{C_1^2 - C_2^2} \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ &= \frac{C_1 - C_2^2 C_1 + C_2 C_1^2 - C_2}{C_1^2 - C_2^2} \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ &= \frac{C_1 - C_2 + C_1 C_2 (C_1 - C_2)}{C_1^2 - C_2^2} \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ &= \frac{1 + C_1 C_2}{C_1 + C_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ &= \frac{1 + C_1 C_2}{C_1 + C_2} \underbrace{\sqrt{x'^2 + y'^2}}_{\rho} \\ &= \frac{1 + C_1 C_2}{C_1 + C_2} \rho \end{aligned}$$

Quanto a m ,

$$\begin{aligned} m &= \frac{R_1}{R_2} \\ &= \frac{\frac{C_1 (1 - C_2^2)}{C_1^2 - C_2^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}{\frac{C_2 (1 - C_1^2)}{C_1^2 - C_2^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ &= \frac{C_1 (1 - C_2^2)}{C_2 (1 - C_1^2)} \end{aligned}$$

□

Gomes Teixeira procura, de seguida os valores de C_1 e C_2 . Declarando imediatamente que

$$C_1 = \frac{\rho - C_2 k}{k - C_2 \rho}. \quad (4.1.16)$$

Demonstração. Na demonstração anterior chegámos a

$$k = \frac{1 + C_1 C_2}{C_1 + C_2} \rho,$$

e assim sendo,

$$\begin{aligned} k(C_1 + C_2) &= (1 + C_1 C_2) \rho \Leftrightarrow \\ k C_1 - C_1 C_2 \rho &= \rho - k C_2 \Leftrightarrow \\ C_1(k - C_2 \rho) &= \rho - k C_1 \Leftrightarrow \\ C_1 &= \frac{\rho - k C_2}{k - C_2 \rho} \end{aligned}$$

□

et ensuite

$$k \rho (C_2^4 - 1) + [m(\rho^2 - k^2) - k^2 - \rho^2] C_2 (C_2^2 - 1) = 0,$$

ou

$$k \rho (C_2^2 + 1) + C_2 [m(\rho^2 - k^2) - k^2 - \rho^2] = 0.$$

TEIXEIRA 1900, p.139

Demonstração. As duas igualdades anteriores, enunciadas por Gomes Teixeira podem-se deduzir a partir de

$$m = \frac{C_1(1 - C_2^2)}{C_2(1 - C_1^2)}.$$

Temos então,

$$\begin{aligned} m(C_2(1 - C_2^2)) &= C_1(1 - C_2^2) \Leftrightarrow \\ mC_2 - mC_2C_1^2 &= C_1 - C_1C_2^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Colocando tudo num só membro e substituindo C_1 pela expressão 4.1.16,

$$\begin{aligned} mC_2 - mC_2C_1^2 - C_1 + C_1C_2^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ mC_2 - mC_2 \frac{(\rho - C_2k)^2}{(k - C_2\rho)^2} - \frac{\rho - C_2k}{k - C_2\rho} + \frac{\rho - C_2k}{k - C_2\rho} C_2^2 &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Depois de colocar o mesmo denominador e fazer todas as multiplicações possíveis, ficamos com

$$\begin{aligned} C_2k^2 - C_2^3k^2 + C_2k^2m - C_2^3k^2m - \underline{k\rho} + \underline{C_2^4k\rho} + C_2\rho^2 - C_2^3\rho^2 - C_2m\rho^2 + C_2^3m\rho^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ k\rho(C_2^4 - 1) + C_2[k^2 - C_2^2k^2 + k^2, -C_2^2k^2m + \rho^2 - C_2^2\rho^2 - m\rho^2 + C_2^2m\rho^2] &= 0 \Leftrightarrow \\ k\rho(C_2^4 - 1) + C_2[k^2(1 - C_2^2) + mk^2(1 - C_2^2) + \rho^2(1 - C_2^2) - m\rho^2(1 - C_2^2)] &= 0 \Leftrightarrow \\ k\rho(C_2^4 - 1) + C_2(C_2^2 - 1)[(m(\rho^2 - k^2) - k^2 - \rho^2)] &= 0. \end{aligned}$$

Chegamos assim, à primeira igualdade.

Sabemos que $(C_2^4 - 1) = (C_2^2 - 1)(C_2^2 + 1)$ e por isso podemos pôr o factor $(C_2^2 - 1)$ em evidência,

$$(C_2^2 - 1)[k\rho(C_2^2 + 1) + C_2((m(\rho^2 - k^2) - k^2 - \rho^2))] = 0$$

Ora, se $C_2^2 - 1 = 0$, então $C_2 = \pm 1$. Nesses casos,

$$\frac{R_1}{R_2} = m = \frac{C_1(1 - 1)}{\pm 1(1 - C_1^2)} = 0 \Rightarrow R_1 = 0,$$

o que significaria, visto R_1 ser o raio da circunferência externa, ficarmos sem área, o que inviabilizaria o estudo. Daí concluirmos que,

$$k\rho(C_2^2 + 1) + C_2[(m(\rho^2 - k^2) - k^2 - \rho^2)] = 0$$

E temos a segunda igualdade presente na citação. □

Se desenvolvermos um pouco mais esta igualdade, obtemos

$$k\rho C_2^2 + C_2 [(m(\rho^2 - k^2) - k^2 - \rho^2)] + k\rho = 0,$$

Que é uma equação de segundo grau, completa, para C_2 . Para termos dois valores reais de C_2 , será necessário um discriminante positivo, ou seja,

$$(\rho^2 - k^2) [\rho^2 (m - 1)^2 - k^2 (m + 1)^2] > 0.$$

Or comme la circonférence dont le rayon est R_2 est placée à l'intérieur de celle dont le rayon est R_1 et comme ρ représente la distance des centres, on a

$$\rho < R_1 - R_2, \rho < R_1 + R_2,$$

et par conséquent

$$\rho < k, \rho(m - 1) < k(m + 1).$$

TEIXEIRA 1900, p.139

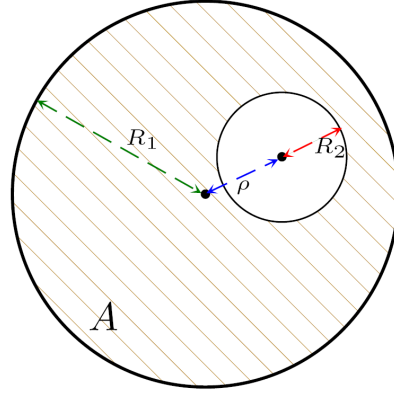


Fig. 4.9: Relação entre R_1 , R_2 e ρ .

Demonstração. É claro, pela imagem, que o raio R_1 será a maior distância que se pode obter na área em questão. E assim sendo, podemos dizer que $R_1 > \rho + R_2$, ou seja, $\rho < R_1 - R_2$. Por outro lado, é também óbvio que $R_1 > \rho - R_2$, e daqui sai $\rho < R_1 + R_2$.

Da afirmação $\rho < R_1 - R_2$, porque Gomes Teixeira tinha definido $k = R_1 - R_2$, vem imediatamente que $\rho < k$. E podemos então fazer

$$\begin{aligned} \rho &< R_1 + R_2 \Leftrightarrow \\ \rho(R_1 - R_2) &< (R_1 + R_2)(R_1 - R_2) \Leftrightarrow (R_1 - R_2) > 0 \\ \rho\left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_2}\right) &< \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_2}\right)k \Leftrightarrow R_2 > 0 \\ \rho(m - 1) &< k(m - 1) \quad \text{Pela definição de } m. \end{aligned}$$

□

Por estas igualdades, Gomes Teixeira conclui que os valores que se encontram para C_2 são reais. De facto,

$$\rho < k \Rightarrow \rho^2 < k^2 \Rightarrow \rho^2 - k^2 < 0$$

e

$$\rho^2(m-1)^2 < k^2(m+1)^2 \Rightarrow \rho^2(m-1)^2 - k^2(m+1)^2 < 0,$$

o que obviamente, nos leva a concluir, que uma multiplicação entre estes resultados, como é o caso do discriminante que procuramos, nos devolve um número positivo.

Logo,

$$C_2 = \frac{-(m(\rho^2 - k^2) - k^2 - \rho^2) \pm \sqrt{(m(\rho^2 - k^2) - k^2 - \rho^2)^2 - 4k^2\rho^2}}{2k\rho}$$

Se fizermos a multiplicação das duas soluções,

$$\frac{(m(\rho^2 - k^2) - k^2 - \rho^2)^2 - (m(\rho^2 - k^2) - k^2 - \rho^2)^2 + 4k^2\rho^2}{4k^2\rho^2} = 1$$

E portanto,

On peut encore remarquer que ces deux racines sont réciproques; soient donc représentées par t et $\frac{1}{t}$. En substituant ces valeurs dans l'équation 4.1.16 il vient, pour déterminer C_1 ,

$$C_1 = \frac{\rho - tk}{k - t\rho} = v, \quad C_1 = \frac{t\rho - k}{tk - \rho} = \frac{1}{v}$$

et on voit que les deux valeurs de C_1 sont aussi réciproques l'une de l'autre.

TEIXEIRA 1900, p.139

Gomes Teixeira usa estes valores, e as fórmulas presentes em 4.1.15, para encontrar α , β , α' , β' .

On trouve ainsi, en posant $C_1 = v$, $C_2 = t$,

$$\alpha' = \frac{1 - t^2}{v^2 - t^2}x', \quad \beta' = \frac{1 - t^2}{v^2 - t^2}y',$$

$$\alpha = \frac{v^2(1 - t^2)}{v^2 - t^2}x', \quad \beta = \frac{v^2(1 - t^2)}{v^2 - t^2}y',$$

TEIXEIRA 1900, p.140

Os resultados acima, resultam da substituição, em 4.1.15, de $C_1 = v$, $C_2 = t$:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha' v^2 \\ \beta = \beta' v^2 \\ \alpha' (v^2 - t^2) = (1 - t^2) x' \\ \beta' (v^2 - t^2) = (1 - t^2) y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha' v^2 \\ \beta = \beta' v^2 \\ \alpha' = \frac{1 - t^2}{v^2 - t^2} x' \\ \beta' = \frac{1 - t^2}{v^2 - t^2} y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{v^2 (1 - t^2)}{v^2 - t^2} x' \\ \beta = \frac{v^2 (1 - t^2)}{v^2 - t^2} y' \\ \alpha' = \frac{1 - t^2}{v^2 - t^2} x' \\ \beta' = \frac{1 - t^2}{v^2 - t^2} y' \end{cases}$$

Para o caso em que $C_1 = \frac{1}{v}$, $C_2 = \frac{1}{t}$, Gomes Teixeira dá-nos o seguinte

$$\alpha' = \frac{v^2 (t^2 - 1)}{t^2 - v^2} x', \beta' = \frac{v^2 (t^2 - 1)}{t^2 - v^2} y',$$

$$\alpha = \frac{t^2 - 1}{t^2 - v^2} x', \beta = \frac{t^2 - 1}{t^2 - v^2} y'.$$

TEIXEIRA 1900, p.140

Estas igualdades retiram-se da mesma forma que os anteriores.

Se olharmos com atenção para todos estes valores, verificamos que o primeiro sistema de resultados é igual ao segundo a menos da permutação α com α' e β com β' . Isto significa que, na realidade, temos apenas dois pontos $a = (\alpha, \beta)$ e $b = (\alpha', \beta')$.

Chegámos então a valores reais para C_1 , C_2 , α , β , α' , β' , que verificam o sistema 4.1.15, e por isso, as circunferências que estamos a tratar estão entre as que podem ser representadas pela equação 4.1.10. Teixeira conclui,

(...) *qu'il existe, par conséquent, une série de la forme 4.1.14 qui représente, dans la couronne limitée par ces circonferences, la fonction donnée $f(x)$.*

TEIXEIRA 1900, p.140

O caso limite em que a circunferência interior se reduz a um ponto, ocupa a parte final deste ponto do artigo de Gomes Teixeira. Nessa eventualidade, o mais importante, e sobre o qual Teixeira chama a atenção, é perceber que $\alpha = x'$, $\beta = y'$, $C_2 = 0$ e $R_2 = 0$. Os demais resultados, advêm de simples substituições nas equações enunciadas. Temos então,

$$C_1 = \frac{\rho - C_2 k}{k - C_2 \rho} \Leftrightarrow C_1 = \frac{\rho}{k}$$

e portanto,

$$C_1^2 = \frac{\rho^2}{k^2} = \frac{x'^2 + y'^2}{R_1^2},$$

e

$$\alpha' = \frac{1 - C_2^2}{C_1^2 - C_2^2} x' \Leftrightarrow \alpha' = \frac{1}{C_1^2} x' \Leftrightarrow \alpha' = \frac{R_1^2}{x'^2 + y'^2} x'$$

$$\beta' = \frac{1 - C_2^2}{C_1^2 - C_2^2} y' \Leftrightarrow \beta' = \frac{1}{C_1^2} y' \Leftrightarrow \beta' = \frac{R_1^2}{x'^2 + y'^2} y'$$

Conclui Gomes Teixeira, que:

Les constantes a et b, qui entrent dans le développement de $f(x)$, sont alors données par les formules

$$a = x' + iy', \quad b = \frac{R_1^2}{x'^2 + y'^2 (x' + iy')}$$

le point b est donc l'inverse de a par rapport au centre du cercle donné.

TEIXEIRA 1900, p.140

Nos pontos seguintes, Gomes Teixeira aplica esta teoria a contornos específicos. Para cada um dos contornos Gomes Teixeira chega uma nova equação de cálculo de $f(x)$, em forma de teorema, e por esta razão vamos também analisar cada uma das aplicações.

Gomes Teixeira não apresenta qualquer desenho dos contornos que está a considerar, em vez disso, descreve-os:

(...) considérons une aire A limitée intérieurement par des arcs de circonférence s_1, s_2, \dots, s_k , limitée extérieurement, dans une direction, par une droite K, qui ne coupe pas ces arcs, et infinie dans les autres directions; et supposons que les circonférences auxquelles appartiennent les arcs considérés ne coupent pas l'aire A (...) Prenons à l'intérieur de A un point d'affixe a et sur la droite perpendiculaire à K, tirée par ce point, un autre d'affixe b tel que les distances des deux points à K soient égales. Tirons ensuite une des circonférences représentées par l'équation $\left| \frac{x-a}{x-b} \right| = \text{const.}$,

dont le rayon soit assez grand et le centre assez éloigné de la droite K pour contenir à l'intérieur les arcs s_1, s_2, \dots

TEIXEIRA 1900, p.141

A função f é considerada holomorfa na área, e a circunferência exterior denominada C .

Parece-nos então, que área considerada será algo do género apresentado a seguir (para $k = 6$),

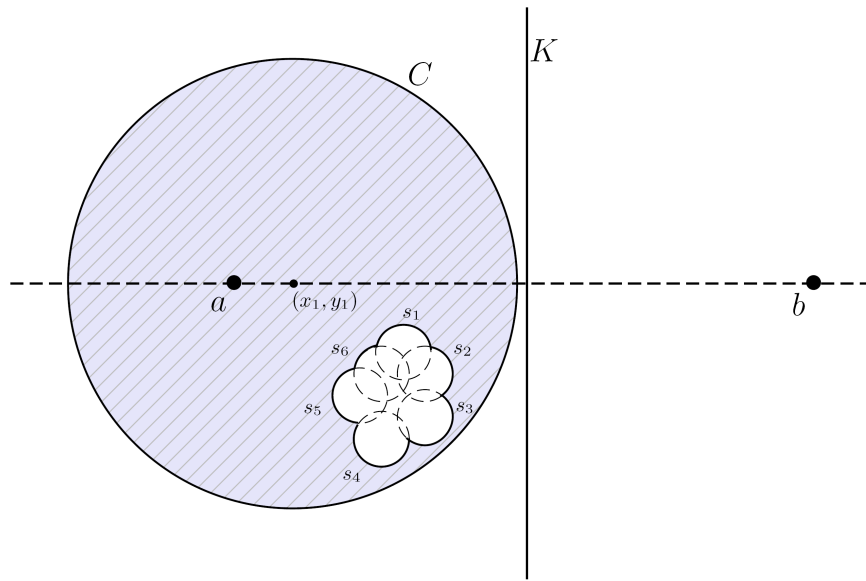


Fig. 4.10: Contorno por arcos

Mais uma vez, pelo teorema de Cauchy, o valor de $f(x)$ é obtido subtraindo o integral sobre o contorno interior (o conjunto de todos os arcos), ao integral sobre o contorno exterior.

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \left[\int_C \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)} - \sum_{m=1}^k \int_{s_m} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)} \right],$$

$$\text{où } \Theta(z) = \frac{z - a}{z - b}.$$

TEIXEIRA 1900, p.141

Na análise aos integrais sobre os arcos, Gomes Teixeira denota os centros dos arcos s_1, s_2, \dots por c_1, c_2, \dots e começa por referir a igualdade:

$$\frac{\Theta'(x)}{\Theta(z) - \Theta(x)} = \frac{1}{z - x} - \frac{1}{z - b} \quad (4.1.17)$$

Demonstração. De

$$\Theta(z) = \frac{z - a}{z - b}$$

sai que

$$\Theta'(z) = \frac{1}{z - b} - \frac{z - a}{(z - b)^2}$$

Vamos, por isso, em primeiro lugar, dividir o quociente $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(z) - \Theta(x)}$ em dois:

$$\frac{\frac{1}{z - b}}{\Theta(z) - \Theta(x)}, \quad \frac{-\frac{z - a}{(z - b)^2}}{\Theta(z) - \Theta(x)}$$

Podemos também, tirar já o valor de $\Theta(z) - \Theta(x)$:

$$\Theta(z) - \Theta(x) = \frac{z - a}{z - b} - \frac{x - a}{x - b} = \frac{(a - b)(z - x)}{(x - b)(z - b)}$$

Vejamos agora o primeiro dos quocientes.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{z - b}}{\Theta(z) - \Theta(x)} &= \frac{\frac{1}{z - b}}{\frac{(a - b)(z - x)}{(x - b)(z - b)}} \\ &= \frac{x - b}{(a - b)(z - x)} \end{aligned}$$

Já o segundo quociente dá-nos,

$$\begin{aligned} -\frac{\frac{z - a}{(z - b)^2}}{\frac{(a - b)(z - x)}{(x - b)(z - b)}} &= -\frac{(z - a)(x - b)}{(a - b)(z - x)(z - b)} \\ &= -\frac{zx - zb - ax + ba}{(a - b)(z - x)(z - b)} \\ &= -\frac{zx - xb + xb - az + az + ab - zb - ax}{(a - b)(z - x)(z - b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(x-a)(z-b)}{(a-b)(z-x)(z-b)} - \frac{(a-b)(z-x)}{(a-b)(z-x)(z-b)} \\
&= -\frac{x-a}{(a-b)(z-x)} - \frac{1}{z-b}
\end{aligned}$$

O resultado final é,

$$\begin{aligned}
\frac{x-b}{(a-b)(z-x)} - \frac{x-a}{(a-b)(z-x)} - \frac{1}{z-b} &= \frac{-b+a}{(a-b)(z-x)} - \frac{1}{z-b} \\
&= \frac{a-b}{(a-b)(z-x)} - \frac{1}{z-b} \\
&= \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-b}
\end{aligned}$$

□

No artigo original de Teixeira, encontramos uma incorrecção neste desenvolvimento. O resultado que Gomes Teixeira apresenta é o seguinte:

$$\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z) - \Theta(x)} = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b},$$

Fig. 4.11: Gralha no desenvolvimento $\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-b}$.

Não temos a certeza de poder atribuir a Teixeira ou a erro tipográfico, uma vez que no resto da análise, foi usado o resultado correcto.

Usando este resultado, podemos escrever,

$$\int_{s_m} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)} = \int_{s_m} \frac{f(z)dz}{z-x} - \int_{s_m} \frac{f(z)dz}{z-b}.$$

O segundo integral do segundo membro desta igualdade é imediatamente nulo, pois b não se encontra no interior da circunferência que contém o arco s_m .

Vamos por isso dedicar-nos ao primeiro desses integrais.

Sendo x um ponto na área considerada, e z um ponto da fronteira formada pelo s_m , é claro que a distância do centro c_m a z é inferior à distância de c_m a x , ou seja, $|z - c_m| < |x - c_m|$ ao longo de s_m , e portanto $\left| \frac{z - c_m}{x - c_m} \right| < 1$. Vamos aproveitar esse facto e fazer

$$\begin{aligned}
\int_{s_m} \frac{f(z)dz}{z-x} &= - \int_{s_m} \frac{f(z)dz}{(x-c_m) \left[1 - \frac{z-c_m}{x-c_m}\right]} \\
&= - \int_{s_m} \frac{f(z)}{x-c_m} \left[1 + \frac{z-c_m}{x-c_m} + \left(\frac{z-c_m}{x-c_m}\right)^2 + \dots\right] \\
&= - \int_{s_m} f(z)dz \frac{1}{x-c_m} - \int_{s_m} f(z)(z-c_m)dz \left(\frac{1}{x-c_m}\right)^2 + \dots
\end{aligned}$$

sobre este desenvolvimento, diz-nos Gomes Teixeira:

(...) on voit que (...) peut être développée en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{z-c_m}{x-c_m}$, et qu'on a par conséquent

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{s_m} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)} = G\left(\frac{1}{x-c_m}\right),$$

TEIXEIRA 1900, p.141

$G\left(\frac{1}{x-c_m}\right)$ é definido por Gomes Teixeira como sendo uma série ordenada segundo potências inteiras e positivas de $\frac{1}{x-c_m}$.

O integral sobre o contorno exterior, C , é calculado como antes, ou seja,

$$\int_C \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n$$

Nous avons donc la formule

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n + \sum_{m=1}^k G\left(\frac{1}{x-c_m}\right)$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'aire limitée par C et par les arcs s_1, s_2, s_3, \dots

TEIXEIRA 1900, p.142

Os coeficientes A_n são dados pela fórmula,

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta^{n+1}(z)} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z) \frac{a-b}{(z-b)^2} dz}{\frac{(z-a)^{n+1}}{(z-b)^{n+1}}} \\
&= \frac{a-b}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)(z-b)^{n-1} dz}{(z-a)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Para além desta circunferência, podemos escolher qualquer uma, que obedeça à mesma equação, e que contenha C no seu interior.

Baseado nesta teoria, Gomes Teixeira dá-nos o teorema seguinte:

Toute fonction holomorphe dans l'aire limitée intérieurement par des arcs de cercle et extérieurement par une droite peut être développée en série de la forme suivante:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b} \right)^n + \sum_{m=1}^k G \left(\frac{1}{x-c_m} \right)$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de cette aire.

TEIXEIRA 1900, p.142

A próxima área, limitada por rectas, é descrita por Gomes Teixeira da seguinte forma:

Soient K_1, K_2, K_3, \dots des droites qui limitent une aire A donnée, mais ne le coupent pas, x un point de son intérieur et $f(x)$ la fonction considérée. Par le point b de l'intérieur de A tirons des droites perpendiculaires à K_1, K_2, K_3, \dots et soient a_1, a_2, a_3, \dots des points de ces perpendiculaires tels que leurs distances à K_1, K_2, \dots soient respectivement égales aux distances de b aux mêmes droites.

TEIXEIRA 1900, p.142

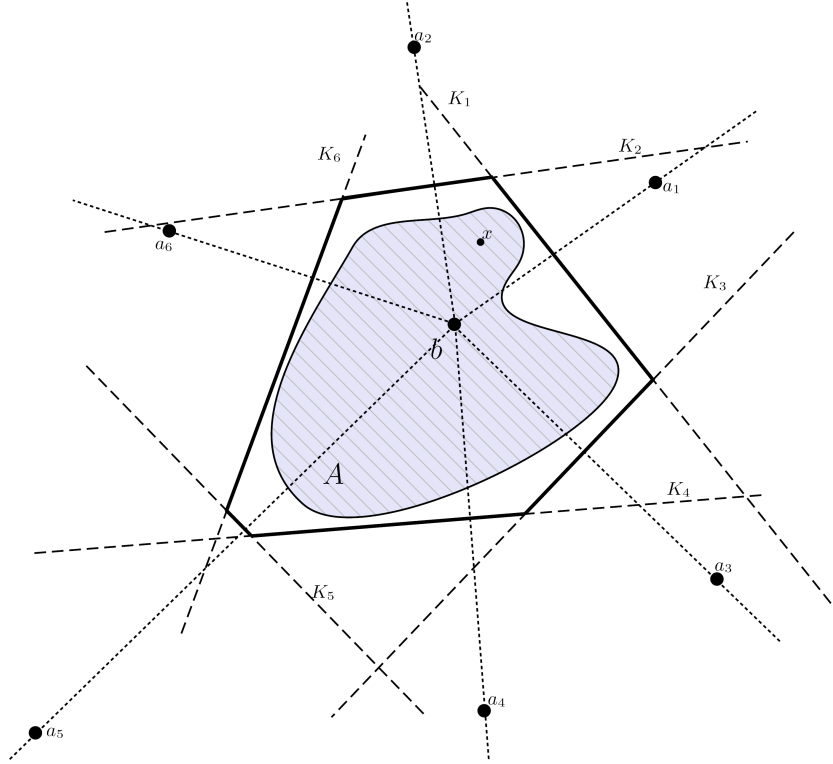


Fig. 4.12: Contorno por rectas(para $m = 6$).

Se considerarmos K o contorno que resulta de todas as rectas, verificamos que, usando o desenvolvimento 4.1.17 da página 97, temos a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_K \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)} = \frac{1}{2i\pi} \int_K \frac{f(z)}{z - x} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_K \frac{f(z)}{z - b} dz.$$

Como desta feita, o ponto b está no interior da área considerada, segundo o teorema de Cauchy (A.1.1), temos:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_K \frac{f(z)}{z - x} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_K \frac{f(z)}{z - b} dz = f(x) - f(z).$$

A independência da função integranda em relação a a_m , leva Gomes Teixeira a definir a função $\Theta(z)$ como $\Theta(z, a_m)$ e fica com o seguinte:

(...) en rendant la constant a qui entre dans la fonction $\Theta(x)$

$$f(x) - f(z) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{2i\pi} \int_{K_m} \frac{f(z)\Theta'(z, a_m)dz}{\Theta(z, a_m) - \Theta(x, a_m)}.$$

TEIXEIRA 1900, p.143

Se analisarmos a figura 4.12, facilmente verificamos que a distância do ponto x - representante de um ponto no interior da área - ao ponto b , é inferior à distância de um ponto z , no contorno, a b . Por outro lado, a distância de x a a_m é superior à distância de z a a_m . Isto leva Teixeira a concluir que

$$\left| \frac{x-b}{x-a_m} \right| < \left| \frac{z-b}{z-a_m} \right|.$$

Com base nestes factos, diz-nos Gomes Teixeira:

(...) on conclut que l'intégrale

$$\int_{K_m} \frac{f(z)\Theta'(z, a_m)dz}{\Theta(z, a_m) - \Theta(x, a_m)}$$

peut être développée en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $\frac{x-b}{x-a_m}$.

TEIXEIRA 1900, p.143

Demonstração. Sabemos que

$$\Theta(z) = \frac{z-a}{z-b}$$

e portanto

$$\left| \frac{x-b}{x-a_m} \right| < \left| \frac{z-b}{z-a_m} \right| \Rightarrow \left| \frac{1}{\Theta(x)} \right| < \left| \frac{1}{\Theta(z)} \right| \Rightarrow |\Theta(x)| > |\Theta(z)| \quad (4.1.18)$$

sendo assim, concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Theta(z, a_m) - \Theta(x, a_m)} &= -\frac{1}{\Theta(x, a_m) - \Theta(z, a_m)} = -\frac{1}{\Theta(x)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Theta(z, a_m)}{\Theta(x, a_m)}} \\ &= -\frac{1}{\Theta(x)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Theta(z, a_m)}{\Theta(x, a_m)} \right)^n \right] \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Theta^n(z, a_m)}{\Theta^{n+1}(x, a_m)} \end{aligned}$$

Voltando ao integral, podemos escrever a igualdade seguinte,

$$\int_{K_m} \frac{f(z)\Theta'(z, a_m)dz}{\Theta(z, a_m) - \Theta(x, a_m)} = -\int_{K_m} f(z)\Theta'(z, a_m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Theta^n(z, a_m)}{\Theta^{n+1}(x, a_m)} dz$$

e ficamos com

$$\begin{aligned} & - \int_{K_m} f(z) \Theta'(z, a_m) dz \frac{1}{\Theta(x, a_m)} - \int_{K_m} f(z) \Theta'(z, a_m) \Theta(z, a_m) dz \frac{1}{\Theta^2(x, a_m)} \\ & - \int_{K_m} f(z) \Theta'(z, a_m) \Theta^2(z, a_m) dz \frac{1}{\Theta^3(x, a_m)} + \dots \end{aligned}$$

Temos então uma série, de potências inteiras e positivas de $\frac{1}{\Theta(x, a_m)}$, ou seja, de $\frac{x-b}{x-a_m}$. □

Gomes Teixeira denomina os coeficientes da série por A_n , e estes são calculados através da fórmula

$$A_n = - \int_{K_m} f(z) \Theta'(z, a_m) \Theta^{n-1}(z, a_m) dz.$$

Esta fórmula de cálculo é muito semelhante à fórmula, indicada na teoria geral, que usamos para calcular os coeficientes B_n . Contudo, como é de potências inteiras e positivas que estamos a tratar, Teixeira opta por manter a notação: A_n para coeficientes que multiplicam potências positivas; B_n para coeficientes que acompanham potências negativas.

Gomes Teixeira termina este ponto com o seguinte teorema:

Toute fonction $f(x)$ holomorphe dans une aire limitée par des droites, qui ne la coupent pas, est developable en série de la forme

$$f(x) - f(b) = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a_m} \right)^n,$$

quand x est l'affixe d'un point de l'intérieur de cette aire.

TEIXEIRA 1900, p.143

O passo seguinte, que resulta lógico, e relativamente ao qual, Gomes Teixeira apenas enuncia um teorema, é aquele que resulta da junção dos casos anteriores, ou seja, em que temos uma área limitada por rectas e por arcos. Escreve então,

Toute fonction holomorphe dans l'aire limitée extérieurement par des droites et par des arcs de circonférence et intérieurement par des arcs de circonférence est developable en série de la forme

$$f(x)-f(b)=\sum_{m=1}^k\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(m)}\left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)+\sum P_m(x-c'_m)+\sum G_m\left(\frac{1}{x-c_m}\right)$$

(c'_1, c'_2, \dots représentant les centres des arcs extérieurs, c_1, c_2, \dots ceux des arcs intérieurs et x un point de l'intérieur de l'aire), si ni les droites ni les circonférences considérées ne coupent pas l'aire.

TEIXEIRA 1900, p.144

Teixeira não define o que seja P_m , no entanto pensamos ser um polinómio de potências de $(x - c'_m)$.

Logo de seguida, propõe-nos uma pequena variação nas condições iniciais: em vez de b estar na área A , passamos a ter b no seu exterior. Esta pequena nuance, vai fazer com que se divida a série $\sum_{m=1}^k\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(m)}\left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)$ em dois casos distintos: o primeiro relativo aos pontos em que temos 4.1.18, e outra onde ela não se mantém.

Vejamos, quando marcamos o ponto b no exterior da área, se tivermos em conta uma recta K_m , ficamos com a_m de um lado da recta e outros de outro. Temos então, para os pontos que estão do mesmo lado da recta que b , a seguinte relação:

$$\left|\frac{x-a_m}{x-b}\right| < \left|\frac{z-a_m}{z-b}\right|$$

E sendo assim, vamos poder fazer uma série com potências inteiras e negativas - e por isso em vez de A_n temos B_n - de $\frac{x-b}{x-a_m}$, ou seja, de $\frac{x-a_m}{x-b}$.

Desaparece também a parcela $f(b)$, uma vez que b é exterior e temos

$$\int_K \frac{f(z)}{z-b} dz = 0$$

Diz-nos Gomes Teixeira:

Si l'on représente par a'_m les valeurs de a_m qui sont les affixes de points du plan placés du même côté que l'aire A , par rapport aux droites K_m , et par a''_m les autres valeurs de a_m , on a alors

$$f(x) = \sum_{m=1}^{k'} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a_m''} \right)^n + \sum_{m=1}^{k''} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(m)} \left(\frac{x-a_m'}{x-b} \right)^n \\ + \sum P_m(c_m') + \sum G_m \left(\frac{1}{x-c_m} \right).$$

TEIXEIRA 1900, p.144

Segue-se uma aplicação concreta à função $p(x)$ em que a área é limitada por 4 rectas que formam um losango centrado na origem e onde $b = 0$ e que não vamos dissecar pois seria a repetição de toda a teoria anterior.

No ponto seguinte, Gomes Teixeira volta ao desenvolvimento em série de potência, quando a área é limitada por arcos de circunferência e rectas e apresenta-nos um novo desenvolvimento para a função $f(x)$. A grande diferença relativamente ao método anterior, reside na forma como se encontram os pontos a_m . No caso dos segmentos de recta, encontramos esses pontos da mesma forma que tínhamos quando a área era limitada por rectas e temos sempre a relação

$$\left| \frac{x-b}{x-a_m} \right| < \left| \frac{z-b}{z-a_m} \right|.$$

Já no caso dos arcos de circunferência, os a_m são encontrados a partir do centro da circunferência que contém cada um dos arcos. Isto é, usando b e o centro c_m , encontramos um a_m que tem as mesmas características do a apresentado na figura 4.7 da página 82, tendo sempre em mente que a circunferência que estamos a considerar está do mesmo lado de b . Escolhemos um a_m para cada um dos arcos. Verifica-se, desta forma, a mesma relação que no caso das rectas.

Como b está no interior da área, Gomes Teixeira define o seguinte:

On a, représentant par s_1, s_2, \dots, s_k les arcs de circonférence ou les segments de droite, qui forment le contour de l'aire, et par ε_m une quantité égale à +1, lorsque s_m fait partie du contour extérieur, et égale à -1, lorsque'il fait partie du contour intérieur,

$$f(x) - f(b) = \sum_{m=1}^k \varepsilon_m \int_{s_m} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)}$$

TEIXEIRA 1900, p.146

Claro que a quantidade ε_m apenas serve para distinguir o contorno exterior do interior, uma vez que enquanto que o contorno exterior é percorrido no sentido positivo e portanto tem sinal positivo, o interior é percorrido no sentido negativo e terá que ser subtraído no cálculo total.

O integral pode ser desenvolvido como presente na página 102, e chegamos então a:

$$f(x) = f(b) + \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k A_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a_m} \right).$$

Ou, pelo já dito anteriormente,

Si b représente un point de l'extérieur de l'aire A, cette formule doit être remplacée par la suivant:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{k'} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a_m''} \right)^n + \sum_{m=1}^{k''} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a_m'} \right)^n$$

TEIXEIRA 1900, p.147

No texto original notámos a falta dos coeficientes B_n na citação acima que, em princípio se deve a gralha tipográfica.

$$f(x) = \sum_{m=1}^{k'} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a_m''} \right)^n + \sum_{m=1}^{k''} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-a_m'}{x-b} \right)^n,$$

Fig. 4.13: Falta do coeficiente B_n no desenvolvimento.

Os dois últimos pontos desta secção do trabalho de Gomes Teixeira, ocupam-se de mostrar que os desenvolvimentos encontrados não podem ser aplicados fora da área considerada.

Temos a série

$$A_0 + A_1 \left(\frac{x-a}{x-b} \right) + A_2 \left(\frac{x-a}{x-b} \right)^2 + \dots, \quad (4.1.19)$$

onde a e b são pontos separados por uma recta K , que passa pelo ponto médio do segmento \overline{ab} e que lhe é perpendicular.

O primeiro passo para atingir os objectivos propostos, consiste em provar que a série anterior é apenas convergente na parte do plano que resulta da divisão por K e que contém b .

Gomes Teixeira começa por considerar a série

$$A_0 + A_1X + A_2X^2 + A_3X^3 + \dots \quad (4.1.20)$$

une série convergente à l'intérieur d'un cercle de rayon égal à l'unité, laquelle représente une fonction qui ne peut pas être continuée à l'extérieur de ce cercle(...)

TEIXEIRA 1900, p.147

A equação 4.1.19 resulta de 4.1.20 fazendo $X = \frac{x-a}{x-b}$.

Podemos encontrar um outro ponto u e construir uma série convergente no círculo de raio ρ e de centro u . Essa série será da forma:

$$b_0 + b_1(x - u) + b_2(x - u)^2 + b_3(x - u)^3 + \dots \quad (4.1.21)$$

Acontece que

$$\frac{x-a}{x-b} \frac{u-a}{u-b} = x-u,$$

e por isso, podemos colocar

$$X = \frac{x-a}{x-b}, \quad A = \frac{u-a}{u-b},$$

e a série 4.1.21 toma a forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{a-b}{A-1} \right)^n \left(\frac{X-A}{X-1} \right)^n \quad (4.1.22)$$

Por hipótese, esta série é convergente quando

$$\left| \frac{X-A}{X-1} \right| < \rho \left| \frac{A-1}{a-b} \right| = \frac{\rho}{|u-b|}$$

Diz-nos Teixeira:

Or, ce cercle doit être tout à l'intérieur du cercle de convergence de la série 4.1.20, parce que la fonction définie par la série 4.1.22 doit coïncider, dans le voisinage du point A, avec la fonction définie 4.1.20 et cette fonction ne peut pas être continuée à l'extérieur de ce cercle. Le cercle de convergence de la série 4.1.21 doit donc être aussi tout à l'intérieur de l'aire de convergence de 4.1.19.

Daqui, Gomes Teixeira conclui que a função definida por 4.1.19 não pode ser expandida para além da recta K .

Assim sendo, todas as funções definidas por

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_i} \right)^n$$

não podem ser expandidas para além da recta K_i , e apenas são convergentes na parte do plano que resulta da divisão por K_i e contém a .

Considere-se S a soma de todas as séries dessa forma, ou seja,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_1} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2} \right)^n + \dots$$

Esta soma é holomorfa na área limitada por todas as rectas.

Mas se considerasse-mos que a função podia ser expandida para lá de K_1 , então poderíamos dizer que S coincide, na área comum, com uma série da forma

$$b_0'' + b_1''(x-u_1) + b_2''(x-u_2)^2 + \dots$$

que converge num círculo C_1 , que corta K_1 , mas nenhuma outra recta K_i . Isso significa que esta série é convergente relativamente a todas as outras rectas.

Sendo assim, a soma

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_3} \right)^n + \dots$$

é convergente. E o mesmo podemos dizer quanto a

$$b_0'' + b_1''(x-u_1) + \dots - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_3} \right)^n + \dots$$

Se a expressão acima é equivalente a S na parte do círculo C_1 que está no interior da área A , então o primeiro membro será

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_1} \right)^n$$

E assim sendo, a função definida pela série acima, pode ser expandida para além de K_1 , o que é absurdo.

Teixeira conclui que

(...)la fonction définie par la série S ne peut pas être continuée à l'extérieur de l'aire A .

TEIXEIRA 1900, p.149

E com isto termina Gomes Teixeira a segunda parte deste artigo. A terceira porção do mesmo não vai ser analisada aqui, visto ser uma repetição do que foi abordado no capítulo anterior da dissertação. Teixeira volta a referir as séries ordenadas segundo potências de senos, mas desta feita de uma forma abreviada, não acrescentando nada que foi referido no primeiro artigo que comentámos.

4.1.3 Sur la série de *Fourier*

Mais uma vez estamos perante um caso particular para a função $\Theta(x)$.

A série de Fourier, que vemos em manuais apresentada como está no anexo A.3, é obtida por Gomes Teixeira de uma forma distinta da habitual. Para isso, Teixeira toma

$$\Theta(x) = e^{\frac{i\pi x}{\omega}}$$

Ficamos então com o integral:

$$\int \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}} dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}$$

O gráfico de $\left| e^{\frac{i\pi x}{\omega}} \right|$, quando ω é real, é o seguinte:

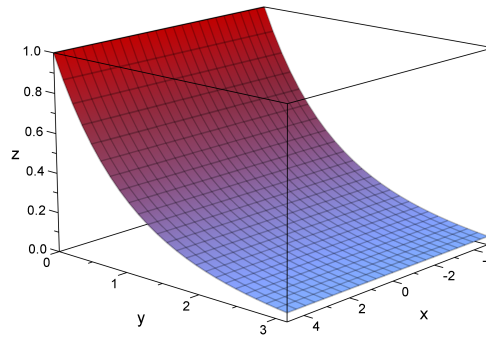


Fig. 4.14: Gráfico de função $\left| e^{\frac{i\pi x}{\omega}} \right|$.

Mas se o valor de ω não for real, então este gráfico sofre uma rotação sobre o eixo dos zz . Este facto tem influência na área que escolhemos para expandir a função.

Diz Gomes Teixeira:

Supposons que la fonction $f(x)$ admette la période 2ω , représentée géométriquement par la droite DA , qui fait un angle égal à l'argument de 2ω avec l'axe des abscisses et supposons que cette fonction soit holomorphe dans la band comprise entre les deux droites parallèles DA et CB .

TEIXEIRA 1900, p.155

Ficamos, então, com uma área que é um paralelogramo de largura igual ao período da função, e, olhando para o gráfico acima, podemos imaginar duas rectas DA — mais

acima – e CB – abaixo da primeira – paralelas ao eixo das abcissas (como o gráfico ilustra uma situação em que ω é real, o que significa que o argumento é 0, ou seja, o ângulo com o eixo dos xx é nulo).

Pelo teorema de Cauchy, tal como nos diz Teixeira, podemos definir a função $f(x)$ da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{2\omega} \int \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}} dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} \quad (4.1.23)$$

Mas como estamos a considerar o paralelogramo $ABCD$, facilmente chegamos a:

(...) on remarquant que les parties de cette intégrale relatives aux droites AB et CD son égales.

$$f(x) = \frac{1}{2\omega} \left[\int_{BC} \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}} dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} + \int_{DA} \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}} dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} \right].$$

TEIXEIRA 1900, p.155

Pela análise do gráfico, facilmente concluímos que todos os pontos x do paralelogramo e para todos os pontos z da recta DA , temos

$$\left| e^{\frac{i\pi z}{\omega}} \right| > \left| e^{\frac{i\pi x}{\omega}} \right|,$$

e que, se z está na recta BC , então temos

$$\left| e^{\frac{i\pi z}{\omega}} \right| < \left| e^{\frac{i\pi x}{\omega}} \right|.$$

Ainda assim, Gomes Teixeira apresenta a dedução destes factos.

Começa, tal como no primeiro artigo analisado, por verificar como obter as “curvas de nível”, através da equação:

$$\left| e^{\frac{i\pi z}{\omega}} \right| = c$$

c étant une constante positive quelconque, laquelle, en posant

$$z = x_1 + iy_1, \quad \omega = \rho (\cos \Theta + i \sin \Theta),$$

put être réduite à la forme suivante

$$e^{-\frac{\pi}{\rho}(y_1 \cos \Theta - x_1 \sin \Theta)} = c$$

ou

$$y_1 = x_1 \tan \Theta - \frac{\rho \log c}{\pi \cos \Theta}.$$

TEIXEIRA 1900, p.156

Demonstração. Para chegarmos a estes resultados, vamos primeiro expandir o expoente $\frac{i\pi z}{\omega}$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\cos \Theta + i \sin \Theta)} &= \frac{\cos \Theta - i \sin \Theta}{(\cos \Theta + i \sin \Theta)(\cos \Theta - i \sin \Theta)} \\ \frac{1}{(\cos \Theta + i \sin \Theta)} &= \frac{(\cos \Theta - i \sin \Theta)}{1} \end{aligned}$$

concluimos

$$\begin{aligned} \frac{i\pi(x_1 + iy_1)}{\omega} &= \frac{i\pi}{\rho}(x_1 + iy_1)(\cos \Theta - i \sin \Theta) \\ &= \frac{i\pi}{\rho}(x_1 \sin \Theta - y_1 \cos \Theta) + \frac{i\pi}{\rho}(x_1 \cos \Theta - y_1 \sin \Theta) \end{aligned}$$

Outro resultado conhecido é

$$|e^{x+iy}| = e^{-Im(y)+Re(x)}$$

E portanto,

$$\left| e^{\frac{\pi}{\rho}(x_1 \sin \Theta - y_1 \cos \Theta) + \frac{i\pi}{\rho}(x_1 \cos \Theta - y_1 \sin \Theta)} \right| = e^{\frac{\pi}{\rho}(x_1 \sin \Theta - y_1 \cos \Theta)}$$

A partir daqui, com simples manipulações algébricas, chegamos ao segundo resultados apresentado por Teixeira:

$$y_1 = x_1 \underbrace{\tan \Theta}_m + \underbrace{\left(-\frac{\rho \log c}{\pi \cos \Theta} \right)}_b.$$

□

Sendo assim, as “curvas de nível” são rectas paralelas a DA , onde a função toma o mesmo valor. Aproveitando este facto, Teixeira estuda apenas um dos pontos de cada rectas, quando $x_1 = 0$, ou seja, para um ponto y'_1 em que temos $e^{-\frac{\pi y'_1 \cos \Theta}{\rho}}$.

Com base neste facto e tendo em conta que o ângulo entre duas rectas é sempre o mais pequeno, ou seja, está sempre entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, apercebemo-nos que quando y'_1 se desloca no sentido das ordenadas positivas, a função toma valores mais pequenos, como a recta DA é aquela que contém o y'_1 mais pequeno, então será aquele que tem os valores maiores para a função.

Da mesma forma, como à recta CB corresponde a maior ordenada, estes serão os menores valores da função.

De tudo isto, aplicando o mesmo raciocínio que apresentámos por variadíssimas vezes nesta dissertação, Gomes Teixeira chega a:

On a donc, le long de DA,

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} = \frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}{e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}} + \dots$$

et, le long de CB,

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} = - \left[\frac{1}{e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}} + \dots \right]$$

TEIXEIRA 1900, p.157

Substituindo estas expansões nos integrais sobre DA e BC atrás indicados, ficamos com

$$\frac{1}{2\omega} \int_{DA} \frac{f(z) e^{\frac{i\pi z}{\omega}} dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} = \frac{1}{2\omega} \int_{DA} f(z) dz + \frac{1}{2\omega} \int_{DA} \frac{f(z) dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}} e^{\frac{i\pi x}{\omega}} + \dots$$

e

$$\frac{1}{2\omega} \int_{BC} \frac{f(z) e^{\frac{i\pi z}{\omega}} dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} = -\frac{1}{2\omega} \int_{BC} f(z) e^{\frac{i\pi z}{\omega}} dz e^{-\frac{i\pi x}{\omega}} - \frac{1}{2\omega} \int_{BC} f(z) e^{\frac{2i\pi z}{\omega}} dz e^{-\frac{2i\pi x}{\omega}} - \dots$$

Com isto, Teixeira define a série

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{n i \pi x}{\omega}}$$

Onde, claramente, temos

$$A_n = \frac{1}{2\omega} \int_{DA} e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z) dz$$

e como o caminho de BC é simétrico de AD ,

$$A_{-n} = -\frac{1}{2\omega} \int_{BC} e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z) dz = \frac{1}{2\omega} \int_{DA} e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z) dz.$$

Juntando os integrais e recorrendo à fórmula de Euler, obtemos o seguinte:

$$\int_{DA} e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z) e^{\frac{i\pi x}{\omega}} + e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z) e^{-\frac{i\pi x}{\omega}} dz = 2 \int_{DA} f(z) \cos \left(\frac{n(x-z)\pi}{\omega} dz \right).$$

Conclui Gomes Teixeira:

On a donc, en représentant par l le segment DA (ou un segment égal pris sur une droite parallèle à DA et BC) la formule de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2\omega} \left[\int_l f(z) dz + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_l f(z) \cos \frac{n(x-z)\pi}{\omega} dz \right].$$

TEIXEIRA 1900, p.157

De facto, atentando nesta fórmula, podemos encontrar uma fórmula com o mesmo formato daquele apresentado no anexo A.3:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\omega} \left[\int_l f(z) dz + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_l f(z) \cos \frac{n(x-z)\pi}{\omega} dz \right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\omega} \int_l f(z) dz}_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{1}{\omega} \int_l f(z) \cos \frac{nz\pi}{\omega} dz}_{a_n} \cos \frac{nx\pi}{\omega} + \underbrace{\frac{1}{\omega} \int_l f(z) \cos \frac{nz\pi}{\omega} dz}_{b_n} \sin \frac{nx\pi}{\omega} \right] \end{aligned}$$

Gomes Teixeira descobriu assim uma nova forma, que se julga nova de encontrar a fórmula de *Fourier*.

No ponto seguinte, Teixeira apresenta simplesmente a generalização para funções não periódicas, pelo que não vamos analisar aqui esta parte do texto original.

Capítulo 5

Crítica aos textos de Gomes Teixeira

Analizados que estão os textos de Gomes Teixeira, é agora natural que se faça uma pequena reflexão sobre eles, tanto no conteúdo como na forma. Procuramos, nesse sentido, abordar os artigos com os olhos críticos de um leitor que não está completamente familiarizado com a matéria abordada.

No que toca ao conteúdo, Teixeira apresenta-nos, de facto, algo novo nas páginas que analisámos – pelo menos no sentido de ter sido algo por ele descoberto, uma vez que havia já apresentado, em 1897, a memória premiada intitulada: *Sobre o Desenvolvimento das Funções em Série* onde explanava este tema.

Embora admita que a base do seu trabalho foram as fórmulas de Lagrange, Bürmann e Laurent, Gomes Teixeira chega a um resultado mais geral que qualquer uma dessas fórmulas e o reconhecimento maior da sua importância chega até nós por WHITTAKER [1927] e WEISSTEIN [2000] onde surge o já referido *Teorema de Teixeira*. Aliás, essa generalização, é consequência dos vários grupos de hipóteses que Teixeira considera no texto, demonstrando assim, a sua preocupação em cobrir todas as situações.

Quanto à forma como expõe, começamos a nossa crítica por um ponto que dificultou sobremaneira a análise a que nos propusemos – a quase completa ausência de referências gráficas. Claro que as capacidades tipográficas não são as mesmas de hoje, mas sendo Gomes Teixeira um homem conhecido pela sua obra ligada à Geometria, eram de esperar mais alguns pontos de apoio deste género ao longo do texto. Ainda assim, devemos realçar que as suas descrições são bastante pormenorizadas e uma ajuda preciosa quando estão em causa circunstâncias distintas dependentes da variação de coeficientes.

Outro factor que pode ter levado Teixeira a negligenciar a parte gráfica do trabalho, prende-se com o público a que se destinavam os textos – matemáticos investigadores,

e é este mesmo factor que, em nosso entender, permite o uso da notação presente nos textos. Esta é, por vezes, pesada e bastante abstracta, recorde-se $s_{2n+1}^{(m)}$ definida na página 110 de TEIXEIRA [1896] e analisada nesta dissertação na página 33. Mas a maior dificuldade, relacionada com notação, que encontrámos nos artigos, firma-se na volatilidade do significado de certas letras. Temos casos em que, a determinada letra, ou conjunto de letras, é atribuída uma expressão algébrica e mais adiante a mesma já denota outra expressão, é o caso de A_n e B_n , onde acima da expressão que lhes é conferida, o que está em jogo é a ideia de que A_n acompanha potências positivas de determinada função e B_n potências negativas.

Somos também de opinião que Gomes Teixeira deixa de fora muitas justificações e demonstrações, talvez por limitação imposta pelo jornal ou por confiança nos conhecimentos dos seus leitores. O que é certo é que isso torna os artigos mais difíceis de ler, primeiro porque obriga a uma maior reflexão sobre algumas afirmações presentes, e segundo, porque devido à ambiguidade que algumas delas carregam, fazem com que tenhamos que analisar o mesmo trecho mais que uma vez, sujeitos a condições diferentes.

Sendo suas a maior parte das conclusões que Teixeira expõe, também não nos fornece quaisquer referências bibliográficas que sirvam de suporte ao estudioso destes artigos, fazendo somente menção a poucos nomes e teoremas.

Por fim, temos que referir pequenas incorrecções/erros. Na maior parte dos casos, julgamos terem origem em problemas tipográficos, sabedores que somos das dificuldades que existiam na tipografia de textos matemáticos, e por isso, é mais do que normal existirem tais gralhas.

Capítulo 6

Conclusão

Num país onde as dificuldades no ensino/aprendizagem da Matemática são mais que evidentes, parece-nos urgente a divulgação dos bons exemplos nacionais desta área. Tal como no desporto, os jovens precisam de boas referências com os quais sintam vontade de se identificar e o facto de à partida já partilharem algumas características – como a nacionalidade – serve, sem dúvida, como incentivo.

No final desta dissertação, é impossível não sentir que o sistema de ensino nem sempre tratou bem os nossos Matemáticos, encontrando-se ainda hoje em recuperação dessa cegueira.

Entre os grandes nomes, ligados à Matemática, que importa dar a conhecer aos nossos estudantes, está aquele sobre o qual versa o nosso trabalho: Francisco Gomes Teixeira.

Partimos para este estudo com a certeza da que a obra de Teixeira era grande pois sabíamos de vários trabalhos já realizados que se centravam nos seus estudos e determinados em avaliar o contributo deste matemático na parte do desenvolvimento de funções em série e se esse contributo é reconhecido pela comunidade matemática nacional e internacional.

De facto, por todas as análises que fizemos na primeira parte do trabalho, depreendemos que Teixeira é realmente um matemático internacional. Desde as referências presentes no *Jahrbuch*, aos artigos publicados no estrangeiro e relações que mantinha com outros matemáticos europeus, tudo corrobora a ideia da grande luta de Gomes Teixeira para afirmar e expor a ciência portuguesa lá fora e o seu enorme esforço em conseguir uma maior aproximação entre o que se fazia em Portugal e no resto da Europa.

A importância dos dois artigos que analisámos estava, de certa forma assegurada porquanto conhecíamos a fama do *Crelle Journal*, mas é na leitura das páginas escritas pelo próprio Teixeira que descobrimos a beleza dos seus resultados, descobrimos a sua

busca pela simplicidade e facilidade das conclusões que escondem a complexidade das deduções. Mas se dúvidas houvesse quanto a essa importância, elas seriam dissipadas pelo enunciado do *Teorema de Teixeira*, presente em WHITTAKER [1927] e no Wolfram Mathworld.

Julgamos que os objectivos a que nos propusemos foram atingidos e que esta dissertação resulta, efectivamente, num documento de fácil leitura e onde podemos encontrar, para além do enquadramento histórico do tema na obra de Teixeira, uma ajuda na compreensão das suas palavras, com a introdução de gráficos e demonstrações que no texto original foram omitidas, expondo alguma da complexidade da Matemática que Gomes Teixeira praticava. Supomos ainda que todos os erros presentes, de ordem tipográfica ou outra, ficaram corrigidos, e que a maior parte das situações que poderiam resultar ambíguas foram esclarecidas.

Existe, como sempre, espaço a melhoras, e parece-nos que seria interessante analisar os mais variados jornais científicos da época de Gomes Teixeira, para verificar se alguma das suas ideias influencia, nesta área, textos de outros matemáticos. Por outro lado, poderia-se-ia também observar a evolução do tema ao longo do tempo, e inferir se existe uma aproximação aos textos de Teixeira, ou pelo contrário, se a teoria relacionada com expansão de funções em série de potências se afasta do que conclui o nosso matemático, e porquê.

ANEXOS

A.1 Teorema de Cauchy. Teorema dos resíduos de Cauchy. Princípio do Argumento

A.1.1 Teorema de Cauchy

Sejam Ω um domínio simplesmente conexo, f uma função holomorfa em Ω e γ uma curva de Jordan regular contida em Ω . Então, para todo o ponto $z_0 \in \text{int } \gamma$, tem-se

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz$$

CARREIRA 1998, p.147

A.1.2 Teorema dos resíduos de Cauchy

Seja f uma função analítica num domínio Ω de \mathbb{C} excepto num número finito de singularidades isoladas $z_j, 1 \leq j \leq n$, e seja γ uma curva de Jordan seccionalmente regular contida em Ω que contém os pontos z_j no seu interior. Então,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res}(f, z_j).$$

CARREIRA 1998, p.251

A.1.3 Princípio do Argumento

Sejam γ uma curva de Jordan e f uma função analítica em $\gamma \cup \text{int } \gamma$ com exceção nos pólos w_1, \dots, w_p , interiores a γ , com ordens, respectivamente $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Suponha-se que f tem os zeros z_1, \dots, z_m interiores a γ , com multiplicidades, respectivamente, β_1, \dots, β_m e sobre γ a função f não se anula nem tem pólos. Então,

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (N - P)$$

onde N é o número de zeros de f no interior de γ e P o número de pólos de f no interior de γ (os zeros e os pólos são contados de acordo com as suas multiplicidades e ordens, isto é, $N = \beta_1 + \dots + \beta_m$ e $P = \alpha_1 + \dots + \alpha_p$

CARREIRA 1998, p.377

A.2 Teorema de Laurent. Série de Laurent. Resíduos

A.2.1 Teorema de Laurent

Seja $f(z)$ uma função analítica na coroa circular $C(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < r < |z - z_0| < R\}$. Então, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$, $z \in C(z_0, r, R)$, sendo a convergência da série absoluta em $C(z_0, r, R)$ e uniforme em cada coroa fechada $\{z \in \mathbb{C} : r \leq \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2 \leq R\}$. Os coeficientes da série são dados pelas fórmulas:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad \text{onde } r < \rho < R.$$

CARREIRA 1998, p.205

À série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

dá-se o nome de **Série de Laurent**.

A.2.2 Série de Laurent e resíduos

Chama-se resíduo de uma função f na singularidade isolada z_0 , ao coeficiente c_{-1} do desenvolvimento de Laurent de f no ponto z_0 em $C(z_0, 0, r)$ e escreve-se

$$\text{res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz.$$

Observação:

O coeficiente c_{-1} destaca-se dos restantes coeficientes do desenvolvimento de Laurent pelo seu papel fundamental no cálculo de integrais, já que $\int_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$.

CARREIRA 1998, p.248

Pólos de multiplicidade k , $k \in \mathbb{N}$

Ainda segundo CARREIRA [1998], se estivermos em presença de um pólo de ordem k , tem-se

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por $(z - z_0)^k$, obtém-se

$$(z - z_0)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + c_0(z - z_0)^k + c_1(z - z_0)^{k+1} + \dots$$

(...)

Então, derivando $(k - 1)$ vezes, obtém-se

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] = (k - 1)! c_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[c_n (z - z_0)^{k+n} \right].$$

Como os termos da série correspondentes a $n \geq 0$ contém o factor $(z - z_0)$, tem-se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] = (k-1)! c_{-1},$$

isto é,

$$c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right].$$

Observação:

1. Note-se que c_{-1} é o coeficiente de ordem $k-1$ no desenvolvimento de Taylor no ponto z_0 da função $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$. Então,

$$c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}g}{dz^{k-1}}(z_0)$$

CARREIRA 1998, p.248

Cálculo de resíduos

Seja $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ em que φ e ψ são funções analíticas em z_0 tais que $\varphi(z_0) \neq 0$ e z_0 é um zero simples de ψ , então $\text{res}(f, z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

CARREIRA 1998, p.250

A.3 Série de Fourier

Seja $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Os números

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, n \geq 1 \end{aligned}$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, n \geq 1$$

denominam-se coeficientes de Fourier de f . A série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \quad (\text{A.3.1})$$

onde os a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f , denomina-se série de Fourier de f .

GUIDORIZZI 1999, p.151

Lista de Figuras

2.1	Variação de valores entre o referido e a realidade.	7
3.1	Gráfico de $ \sin z $	14
3.2	Contornos obtidos para diferentes valores de c	15
3.3	Contornos resultantes do gráfico de $ \sin z $	15
3.4	Ex. de contorno para $c < 1$	15
3.5	Ex. de contorno para $c = 1$	15
3.6	Ex. de contorno para $c > 1$	15
3.7	Porção do gráfico considerado no estudo.	16
3.8	Gráfico de 3.1.8 para alguns $c \leq 1$	21
3.9	Exemplo de tangente no ponto A	22
3.10	Exemplo de tangente no ponto B	23
3.11	Semi-eixos da elipse	27
3.12	Gralha no cálculo de A_4	29
3.13	Contorno S	50
3.14	Erro na ordem de integração.	50
3.15	Gráfico original.	58
3.16	Gráfico da transformada.	58
4.1	Coroa formada por S e s	63
4.2	Forma e orientação do contorno.	65
4.3	Gralha tipográfica na igualdade de B_n	69
4.4	Ilustração da coroa formada pelos contornos S e s	69
4.5	Erro no expoente associado a $(x - b_m)$	78
4.6	Circunferência com centro na recta ab	81
4.7	Efeito da variação de C	82
4.8	Gráfico de $r^2(C)$	84
4.9	Relação entre R_1 , R_2 e ρ	92
4.10	Contorno por arcos	96
4.11	Gralha no desenvolvimento $\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-b}$	98

4.12 Contorno por rectas(para $m = 6$).	101
4.13 Falta do coeficiente B_n no desenvolvimento.	106
4.14 Gráfico de função $\left e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right $	110

Lista de Tabelas

2.1	Obras referenciadas como <i>Teixeira, F. G.</i>	6
2.2	Obras referenciadas como <i>Gomes Teixeira, F.</i>	6
2.3	Obras referenciadas como <i>Teixeira, F. Gomes</i>	6
2.4	Totais de obras	6
2.5	Artigos publicados por Teixeira no <i>Crelle Journal.</i>	7
2.6	Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas	8
2.7	Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto.	8

Bibliografia

- AFONSO, A. M. (1974). *Curso de História da Civilização Portuguesa*. Porto Editora, Lda, 6ª edition.
- AHLFORS, L. V. (1966). *Complex analysis, an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. McGraw Hill, 2ª edition.
- ALVES, M. G. D. F. (2004). *Francisco Gomes Teixeira. O homem, o cientista, o pedagogo*. Universidade do Minho - Escola de Ciências - Departamento de Matemática, Braga.
- BOTTAZZINI, U. (1986). *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. Springer-Verlag.
- CARREIRA, Maria Adelaide; DE NÁPOLES, M. S. M. (1998). *Variável Complexa - Teoria elementar e exercícios resolvidos*. McGraw-Hill.
- GRATTAN-GUINNESS, I. (1994). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, volume 1. Routledge.
- GUIDORIZZI, H. L. (1999). *Um Curso de Cálculo*, volume 4. Livros Técnicos e Científicos, 3ª edition.
- NEEDHAM, T. (1997). *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press - Oxford.
- STRIJK, D. J. (1997). *História Concisa das Matemáticas*. Gradiva.
- TEIXEIRA, F. G. (1896). Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Obras sobre Matemática do Dr. F. Gomes Teixeira - Volume Primeiro:103–125.
- TEIXEIRA, F. G. (1900). Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Obras sobre Matemática do Dr. F. Gomes Teixeira - Volume Primeiro:127–161.

WEISSTEIN, E. W. (2000). Teixeira's theorem. *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/TeixeirasTheorem.html>.

WHITTAKER, E. T.; WATSON, G. N. (1927). *A Course of Modern Analysis*. Cambridge, University Press, 4^a - reprinted edition.

EMIS (2007). Jahrbuch über die fortschritte der mathematik. <http://www.emis.de/MATH/JFM/JFM.html>.

FCUP (2007). Fundo antigo. <http://www.fc.up.pt/fa/>.